2020학년도 1학기

청산은 나를 보고 말없이 살라하고
창공은 나를 보고 티 없이 살라하네
탐욕도 벗어놓고 성냄도 벗어놓고
물같이 바람같이 살다가 가라하네
-나옹선사-

해석학 및 연습1 강의노트

서울시립대학교 수학과

교수 신 동 윤

차 례

1. 가산집합과 비가산집합 1
2. 실수의 대수적 성질과 순서 성질 9
3. 완비성공리 15
4. 수열과 급수의 수렴과 극한 23
5. 단조수열 36
6. 부분수열 46
7. Cauchy수열 56
8. 실수지수 63
9. 함수의 극한 78
10. 함수의 연속 89
11. 연속함수의 성질 96
12. 미분 103
13. 평균값정리 112
14. L'Hospital법칙 118
15. 평등연속 126

참고문헌 135

성적평가방법 및 수업계획서

성적평가방법 : 출석(100), 중간시험(100), 기말시험(100), 수시시험(100)

★ 출석점수: 출석, 지각, 결석 1회당 각각 5, 0, -10점으로 최대 100점, 30점 이하 F
★ 중간 및 기말시험 : O, X문항, 단답형문항, 서술형 문항으로 구성.
★ 수시시험 : 연습문제에서 출제.
★ 아래 표에 따라 성적을 부여할 예정.

점수	A+	A0	B+	B0	C+	C0	D+	D0
성적	370-400	350-369	320-349	290-319	260-289	230-259	200-229	170-199

진도표

1주 : 가산집합과 비가산집합
2주 : 실수의 대수적 성질과 순서 성질
3주 : 완비성공리
4주 : 수열과 급수의 수렴과 극한
5주 : 단조수열과 부분수열
6주 : Cauchy수열
7주 : 실수지수
8주 : 중간시험
9주 : 함수의 극한과 연속
10주 : 연속함수의 성질
11주 : 미분
12주 : 보강 주
13주 : 평균값정리
14주 : L'Hospital법칙
15주 : 평등연속
16주 : 기말시험

1. 가산집합과 비가산집합

이 절에서는 자연수의 정렬성, 수학적 귀납법, 유한집합, 무한집합, 가산집합, 비가산집합에 대해 알아본다.

0. 바탕내용

구간, 열린구간, 닫힌구간, 전사함수, 위로의 함수, 단사함수, 일대일함수, 일대일대응, 전단사함수, $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $\mathbb{N}$(자연수전체집합), $\mathbb{Z}$(정수전체집합), $\mathbb{Q}$(유리수전체집합), $\mathbb{R}$(실수전체집합), $A \subset \mathbb{R}$에 대해 $A^+ = \{x \in A \mid x \geq 0\}$

자연수전체집합 $\mathbb{N}$은 다음 성질을 만족시킨다.

1. 자연수의 정렬성(well-ordering property of $\mathbb{N}$). 공집합이 아닌 N의 부분집합 S는 최소원을 가진다. 즉, 모든 $s \in S$에 대해 $m \leq s$ 인 원소 $m \in S$가 존재한다.

2. 수학적 귀납법. 자연수 n에 관한 명제 $p(n)$에 대해 다음 두 조건이 성립하면 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $p(n)$은 참이다.
(1) $p(1)$은 참이다.
(2) $p(n)$이 참이면 $p(n+1)$도 참이다.

증 명 $\mathbb{N}$의 부분집합 S를 다음과 같이 정의하자.

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ 이 참이 아니다}\}$$

$S \neq \varnothing$라면 자연수의 정렬성에 의해 S는 최소원을 가진다.
이 최소원을 m이라고 하면 조건 (1)에 의해 $m \geq 2$이고 다음이 성립한다.
[1] $p(m)$은 참이 아니고, $p(m-1)$은 참이다.
[2] $p(m-1)$은 참이므로 조건 (2)에 의해 $p(m)$이 참이다.
[3] [1]에서 $p(m)$은 참이 아니고, [2]에서 $p(m)$이 참이 되어 모순이다.

그러므로 $S = \varnothing$, 즉 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $p(n)$은 참이다.

두 유한집합 X와 Y에 대해 일대일대응 $f : X \to Y$가 존재하면 X와 Y의 원소의 개수는 서로 같다. 마찬가지로 무한집합인 경우도 일대일대응이 존재하면 두 집합의 크기가 같다고 자연스럽게 생각할 수 있는데 이것을 다음과 같이 나타낸다.

3. 정 의. 집합에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) 두 집합 X와 Y에 대해 일대일대응 $f : X \to Y$이 존재하면 X와 Y는 대등(equipotent)하다고 하고 $X \sim Y$로 나타낸다.

(2) $\mathbb{N}$과 대등한 집합을 가부번집합(denumerable set) 또는 가산무한집합(countably infinite set)이라고 한다.

(3) 유한 또는 가부번집합을 가산집합(countable set)이라고 한다.

(4) 가산집합이 아니면 비가산집합(uncountable set)이라고 한다.

4. 보 기. (1) 함수 $f : (0, 1) \to (-1, 1)$, $f(x) = 2x - 1$은 일대일대응이므로
$(0, 1) \sim (-1, 1)$ 이다.

(2) 함수 $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \tan\frac{\pi x}{2}$는 일대일대응이므로 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$이다.

(3) (1), (2)의 함수 f와 g에 대해 $h : (0, 1) \to R$, $h(x) = g(f(x))$는 일대일대응이므로 $(0, 1) \sim \mathbb{R}$이다. 마찬가지로 $X \sim Y$이고 $Y \sim W$이면 $X \sim W$이다.

(4) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$이므로 $\mathbb{N}$은 가부번집합이다.

(5) $\mathbb{N}_e = \{2, 4, 6, \cdots\}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_e$, $f(n) = 2n$라 하면 f는 일대일대응이므로 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_e$
즉, $\mathbb{N}_e$은 가부번집합이다.

(6) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를

$$f(m,n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m$$

로 정의하면 f는 일대일대응이므로 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$은 가부번집합이다.

5. 정 리. $\mathbb{N}$의 부분집합 A는 가산집합이다.

증 명 A가 유한집합이면 A는 가산집합이다.
A가 무한집합이라고 하자.

$$A \neq \varnothing$$

이므로 자연수의 정렬성에 의해

$$A \text{ 의 최소원 } n_1$$

이 존재한다. 또 A가 무한집합이므로

$$A - \{n_1\} \neq \varnothing$$

이다. 따라서 자연수의 정렬성에 의해

$$A - \{n_1\} \text{ 의 최소원 } n_2$$

가 존재한다. 이와 같이

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots,\ n_{k-1}$$

이 정해졌다고 하자. A가 무한집합이므로

$$A - \{n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}\} \neq \varnothing$$

이다. 마찬가지로 자연수의 정렬성에 의해

$$A - \{n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}\} \text{ 의 최소원 } n_k$$

가 존재한다. 따라서 함수

$$f\ :\ N \to A,\ f(k) = n_k$$

는 일대일대응이므로 A는 가부번집합이다.

6. 정 리. 집합 $X \neq \varnothing$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) X는 가산집합이다.
(2) 전사함수 $f\ :\ \mathbb{N} \to X$가 존재한다.
(3) 일대일함수 $g\ :\ X \to \mathbb{N}$가 존재한다.

증 명 (1) $\Rightarrow$ (2) X가 가산집합이면 X는 유한집합이거나 가부번집합이다.
X가 가부번집합이면 가부번집합의 정의에 의해 일대일대응 $f\ :\ \mathbb{N} \to X$가 존재한다.
X가 유한집합이면 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 꼴이다. 함수 $f\ :\ \mathbb{N} \to X$를

$$f(k) = \begin{cases} x_k, & 1 \le k \le n \\ x_n, & k > n \end{cases}$$

로 정의하면 f는 전사함수이다.
(2) $\Rightarrow$ (3) 함수 $f\ :\ \mathbb{N} \to X$가 전사함수이므로 각 $x \in X$에 대해

$$f^{-1}(x) \neq \varnothing$$

이다. 따라서 함수 $g\ :\ X \to \mathbb{N}$를

$$g(x) = \min\{f^{-1}(x)\}$$

로 정의하면 g는 정의가 잘되고 일대일함수이다.
(3) $\Rightarrow$ (1) X와 $g(X)$가 대등하고 $g(X) \subset \mathbb{N}$이므로 X는 가산집합이다.

7. 보 기 (1) 세 자연수의 순서쌍 (k, m, n)에 대해

$$f(k, m, n) = 2^k\ 3^m\ 5^n$$

라 하면 함수 $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$은 일대일함수이므로 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$은 가산집합이다.

(2) 정수 k에 대해

$$f(k) = 2^{|k|+k}\ 3^{|k|-k}$$

라 하면 함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$은 일대일함수이므로 $\mathbb{Z}$는 가산집합이다.

(3) 유리수 $r = \frac{k}{n}$ (k는 정수, n은 자연수이고 k와 n은 서로소)에 대해

$$f(r) = 2^n\ 3^{|k|+k}\ 5^{|k|-k}$$

라 하면 함수 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$은 일대일함수이므로 $\mathbb{Q}$는 가산집합이다.

(4) $\Omega = \{A \subset \mathbb{N} \mid n(A) = 4\}$라고 하자. $A = \{k, l, m, n\} \subset N$(단, $k < l < m < n$)에 대해

$$f(A) = 2^k\ 3^l\ 5^m\ 7^n$$

로 정의하면 함수 $f : \Omega \to \mathbb{N}$은 일대일함수이므로 Ω는 가산집합이다.

(5) $\Omega = \{A \subset \mathbb{N} \mid n(A) < \infty\}$라 하고, 소수를 크기순으로 $p_1, p_2\, p_3,$ …라고 하자.

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset N\text{(단, } a_1 < a_2 < \cdots < a_n)$$

에 대해 $f(A) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$로 정의하면 함수 $f : \Omega \to \mathbb{N}$은 일대일함수이므로 Ω는 가산집합이다.

(6) $\Omega = \{A \subset \mathbb{N} \mid n(A) = \infty\}$가 가부번집합이라면

$$\Omega = \{A_n\}_{n=1}^{\infty},\ A_n = \{a_{nk}\}_{k=1}^{\infty},\ a_{nk} < a_{nk+1}$$

꼴로 놓을 수 있다. 이때 $b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_{kk},\ B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$라고 하면 $B \in \Omega$이지만 $B \neq A_n$이므로 모순이다. 따라서 Ω는 비가산집합이다.

8. 정 리. 두 집합 A, B에 대해 함수 $f : A \to B$가 존재할 때, 다음이 성립한다.
(1) f가 일대일함수일 때; B가 가산이면 A도 가산이고, A가 비가산이면 B도 비가산이다.
(2) f가 전사함수일 때; A가 가산이면 B도 가산이고, B가 비가산이면 A도 비가산이다.
(3) $A \subset B$일 때, B가 가산이면 A도 가산이고, A가 비가산이면 B도 비가산이다.

증 명 (1) B가 가산집합이면 정 리 6에 의해 일대일함수 $g : B \to \mathbb{N}$이 존재한다.
따라서 함수 $g \circ f : A \to \mathbb{N}$이 일대일함수이므로 정 리 6에 의해 A는 가산집합이다.
(2) A가 가산집합이면 정 리 6에 의해 전사함수 $g : \mathbb{N} \to A$가 존재한다.
그런데 함수 $f \circ g : \mathbb{N} \to B$가 전사함수이므로 정 리 6에 의해 B는 가산집합이다.
(3) 일대일함수 $f : A \to B$가 존재하므로 (1)에 의해 성립한다.

9. 정 리. 가산집합 $A_k(k\in\mathbb{N})$에 대해 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 는 가산집합이다.

증 명 $B_k=A_k\cup\{k\}$ 라 하면 B_k 는 공집합이 아닌 가산집합이다.
따라서 정 리 6에 의해 전사함수

$$f_k\ :\ \mathbb{N}\ \rightarrow\ B_k$$

가 존재한다.

$$f\ :\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \rightarrow\ \bigcup_{k=1}^{\infty}B_k,\ f(n,k)=f_k(n)$$

로 정의하면 f 는 전사함수이다. 따라서 정 리 6에 의해 $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$ 는 가산집합이다.
그런데 $A\subset B$ 이므로 정 리 8에 의해 A 도 가산집합이다.

10. 정 리. 열린구간 $(0,\,1)$은 비가산집합이다.

증 명 $(0,\,1)$은 유한집합이 아니다. 따라서 $(0,\,1)$이 가산집합이라면 $\mathbb{N}\sim(0,\,1)$이므로 $(a,\,b)=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 꼴로 나타낼 수 있다. 그러면 $0<x_n<1$ 이므로 x_n 을 소수로 전개하여

$$x_n=0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ \cdots,\ a_{nk}\in\{0,\,1,\,2,\,\cdots,\,8,\,9\}$$

꼴로 나타낼 수 있다. 이때,

$$y_n=\begin{cases}3, & a_{nn}=7,\\ 7, & a_{nn}\neq 7\end{cases}$$

이라 하면

$$y=0.y_1y_2y_3\ \cdots$$

은 $y\in(0,\,1)$ 이다. 그러나 각 자연수 n 에 대해 소수 n 번째 자리수를 비교하면

$$y\neq x_n$$

이므로 $y\notin\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=(0,\,1)$ 이 되어 모순이 생긴다. 따라서 열린구간 $(0,\,1)$은 비가산집합이다.

열린구간 $(a,\,b)$ 에 대해 $(0,\,1)\sim(a,\,b)$ 이므로 구간 $(a,\,b)$ 도 비가산집합이고, $(a,\,b)$ 을 포함하는 실수의 부분집합은 모두 비가산집합이다.

11. 보 기 7(6)을 다음과 같이 보일 수 있다.

함수 $F\ :\ \Omega\ \rightarrow\ (0,\,1],\ F(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},\ a_n=\begin{cases}1, & n\in A\\ 0, & a\notin A\end{cases}$는 전사이므로 Ω는 비가산이다.

핵심내용

1. 집합 $X \neq \varnothing$ 에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) X는 가산집합이다.
(2) 전사함수 $f : \mathbb{N} \to X$가 존재한다.
(3) 일대일함수 $g : X \to \mathbb{N}$가 존재한다.

2. Q, $\{A \mid n(A) < \infty,\ A \subset \mathbb{N}\}$는 가산집합, $\{A \in P(\mathbb{N}) \mid n(A) = \infty\}$는 비가산집합이다.

3. 두 집합 A, B에 대해 함수 $f : A \to B$가 존재할 때, 다음이 성립한다.
(1) f가 일대일함수일 때; B가 가산이면 A도 가산이고, A가 비가산이면 B도 비가산이다.
(2) f가 전사함수일 때; A가 가산이면 B도 가산이고, B가 비가산이면 A도 비가산이다.
(3) $A \subset B$일 때, B가 가산이면 A도 가산이고, A가 비가산이면 B도 비가산이다.

4. 가산집합 $A_k (k \in \mathbb{N})$에 대해 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 는 가산집합이다.

5. 열린구간 $(0, 1)$은 비가산집합이다.

연습문제

1. 자연수 n 에 관한 명제 $p(n)$ 이 다음 두 조건을 만족시키면 $p(n)$은 모두 참임을 보여라.
(1) $p(1)$ 이 참이다.
(2) $k=1, 2, \cdots, n$ 에 대해 $p(k)$ 가 참이면 $p(n+1)$ 도 참이다.

B^A 는 A에서 B로의 함수전체집합이고 $a\in\mathbb{R},\ A\subset\mathbb{R}$에 대해 $aA=\{ax \mid x\in A\}$라 하자.

2. 다음 집합은 가산집합임을 보여라.
(1) $\left\{\dfrac{k}{2^n} \mid n, k\in\mathbb{N}\right\}$ (2) $\mathbb{N}^{\{0, 1\}}$ (3) $\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall k,\ f(k)\le f(k+1),\ \ n(f(\mathbb{N}))<\infty\right\}$

3. 다음 집합은 비가산집합임을 보여라.
(1) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (2) $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$
(3) $\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n,\ f(n)\le f(n+1)\right\}$ (4) $\{A\subset\mathbb{N} \mid 2A\subset A\}$
(5) $\{A\subset\mathbb{N} \mid 2\mathbb{N}\subset A\}$ (6) $\{A\subset\mathbb{N} \mid 6\mathbb{N}\subset A\subset 2\mathbb{N}\}$
(7) $\left\{\sum_{n-1}^{\infty}\dfrac{a_n}{10^n} \mid a_n\in\{1, 5\}\right\}$ (8) $\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n,\ f(n)+2^n<f(n+1)\right\}$

4. A 가 무한집합이고 B가 가산집합이다.
(1) $X\sim\mathbb{N}$인 A의 부분집합 X가 존재함을 보여라.
(2) $A\sim A\cup B$ 임을 보여라.

5. 다음을 만족시키는 집합 A는 각각 가산집합임을 보여라.
(1) 각 $k\in\mathbb{N}$에 대해 $n\left(f^{-1}(k)\right)=5$인 함수 $f : A\to\mathbb{N}$이 존재한다.
(2) 각 $k\in\mathbb{N}$에 대해 $f^{-1}(k)\sim\mathbb{N}$인 함수 $f : A\to\mathbb{N}$이 존재한다.
(3) 각 $k\in\mathbb{N}$에 대해 $f^{-1}(k)$가 유한집합인 함수 $f : A\to\mathbb{N}$이 존재한다.
(4) 각 $k\in\mathbb{N}$에 대해 $f^{-1}(k)$가 가산집합인 함수 $f : A\to\mathbb{N}$이 존재한다.
(5) A는 정수 계수 다항식의 해 전체집합이다.

☆6. 열린구간 $(0, 1)$ 에서 닫힌구간 $[0, 1]$ 로의 일대일대응을 하나 구하라.

읽을거리

여우와 신포도

여우 한 마리가 누이동생을 데리고 길을 가다가 탐스럽고 향긋한 포도송이가 주렁주렁 매달린 포도밭을 지나게 되었는데, 그렇게 먹음직스러운 포도는 일찍이 본 적이 없었다. 하지만 포도가 어찌나 높이 매달려 있었던지 아무리 황새처럼 모두뜀을 뛰어도 팔이 닿지 않았다.

한참을 뛰락내리락 포도나무와 씨름하던 동생 여우는 이렇게 내뱉었다. "저 포도는 너무 시어서 따 봐야 먹지도 못해. 그냥 집에 가서 엄마한테 점심을 차려 달라는 게 났겠어. 안 갈래?"

묘한 라이벌 의식을 느낀 오빠가 곧 바로 대꾸했다. "싫다. 넌 지금 저 포도를 따지 못하는 네 무능을 그런 식으로 합리화하고 있는 거야. 하지만 난 달라. 난 관념론자가 아니니까 기꺼이 현실과 맞서겠어. 저 포도는 분명히 지금까지 먹어 본 어떤 것보다 달콤할 거야. 난 약간이라도 맛을 볼 때까지 단념하지 않아."

그리하여 누이동생은 총총이 그 자리를 떴고, 오빠는 고집스럽게도 포도를 따려고 계속해서 뛰어올랐다. 몸에서 힘이 빠져나갈수록, 그래서 노력이 가망 없어질수록, 그 포도가 최고로 맛있을 것이라는 여우의 믿음은 더욱 확고해져 갔다.

좌절감이 심해져서 이내 발작 증세를 일으켰다. 마침내 그 여우는 자기 꼬리를 물어뜯겠다고 뱅글뱅글 돌면서 정신없이 깽깽거리기 시작했다. 여우의 울음소리를 듣고 깜짝 놀라서 총을 들고 나온 포도밭 주인이 여우의 머리를 향해 총을 발사했다. 총알은 오빠 여우의 머리를 날려 보냈다.

출처: 파라독스 이솝우화/ 로버트 짐러 지음/ 김정우 옮김/ 정신세계사(1991)

2. 실수의 대수적 성질과 순서 성질

이 절에서는 실수의 대수적 성질과 순서 성질에 대해 알아본다.

0. 바탕내용

바탕 1. 실수전체집합 $\mathbb{R}$

1. 실수의 대수적 성질. 실수전체집합 $\mathbb{R}$에는 다음을 만족시키는 연산 덧셈 $+$과 곱셈 $\cdot$이 정의되어 있다.

A_1 덧셈에 대한 교환법칙. 모든 $a,\ b\in\mathbb{R}$에 대해 $a+b=b+a$이다.

A_2 덧셈에 대한 결합법칙. 모든 $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$에 대해 $(a+b)+c=a+(b+c)$이다.

A_3 덧셈에 대한 항등원. 모든 $a\in\mathbb{R}$에 대해 $a+0=0+a=a$ 인 $0\in\mathbb{R}$이 존재한다.

A_4 덧셈에 대한 역원. 각 $a\in\mathbb{R}$에 대해 $a+(-a)=(-a)+a=0$ 인 $-a\in\mathbb{R}$가 존재한다.

M_1 곱셈에 대한 교환법칙. 모든 $a,\ b\in\mathbb{R}$에 대해 $a\cdot b=b\cdot a$이다.

M_2 곱셈에 대한 결합법칙. 모든 $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$에 대해 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$이다.

M_3 곱셈에 대한 항등원. 모든 $a\in\mathbb{R}$에 대해 $1\cdot a=a\cdot 1=a$ 인 $1\in\mathbb{R}\,(1\neq 0)$이 존재한다.

M_4 곱셈에 대한 역원. 각 $0\neq a\in\mathbb{R}$에 대해 $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$ 인 $\frac{1}{a}\in\mathbb{R}$가 존재한다.

D 배분법칙. 모든 $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$에 대해 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ 이다.

임의의 두 실수 a와 b의 곱 $a\cdot b$을 관례에 따라 ab로 나타내고, $a\cdot a$를 a^2으로 나타낸다. 일반적으로, 모든 자연수 n에 대해 $a^{n+1}=a\cdot a^n$으로 정의한다.

또 모든 $a,b,c\in R$에 대해 A_2에 의해 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 이므로 이것을 $a+b+c$로, M_2에 의해 $(ab)c=a(bc)$ 이므로 이것을 abc로 나타낸다.

또 $a\neq 0$ 인 실수 a와 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$로 정의하고, 두 실수 a와 b에 대해 $a+(-b)=a-b$로 정의하며, 두 실수 $a,\ b\,(b\neq 0)$에 대해 $a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$로 정의한다.

2. 정 리. 네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $a+a=a$이면 $a=0$이다.

(2) $a\cdot 0=0$

(3) $-a=(-1)a$

(4) $-(-a)=a$

(5) $-(a+b)=(-a)+(-b)$

(6) $(-1)(-1)=1$

(7) $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이다.

(8) $(-a)b=-ab,\ (-a)(-b)=ab$

(9) $a\neq 0$ 이면 $a^{-1}\neq 0$ 이다.

(10) $bd\neq 0$이면 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$이다.

(11) $bd\neq 0$이면 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$이다.

증 명 (1), (2), (10)만 증명하고 나머지는 연습문제로 남긴다.

(1) $a_{\mathrm{A}_3}=a+0_{\mathrm{A}_4}=a+\{a+(-a)\}_{\mathrm{A}_2}=(a+a)+(-a)_{a+a=a}=a+(-a)_{\mathrm{A}_4}=0$

(2) $a\cdot 0_{\mathrm{A}_3}=a\cdot 0+0_{\mathrm{A}_4}=a\cdot 0+[a\cdot 0+\{-(a\cdot 0)\}]_{\mathrm{A}_2}=(a\cdot 0+a\cdot 0)+\{-(a\cdot 0)\}_{\mathrm{D}}$
$=a\cdot(0+0)+\{-(a\cdot 0)\}_{\mathrm{A}_3}=a\cdot 0+\{-(a\cdot 0)\}_{\mathrm{A}_4}=0$

(10) $x=\frac{a}{b},\ y=\frac{c}{d}$ 라 하면 $a=bx,\ c=dy$ 이다.

따라서 $ac=(bx)(dy)=(bd)(xy)$ 이므로 $xy=\frac{ac}{bd}$ 이다.

3. 순서공리. 다음 두 조건을 만족시키는 집합 $\mathbb{P}\subset\mathbb{R}$가 존재한다.

O_1 모든 $a\in\mathbb{P},\ b\in\mathbb{P}$에 대해 $a+b\in\mathbb{P},\ ab\in\mathbb{P}$이다.

O_2 모든 $a\in\mathbb{R}$에 대해 다음 중 하나만 성립한다.

$$a\in\mathbb{P},\quad a=0,\quad -a\in\mathbb{P}$$

집합 $\mathbb{P}$의 원소를 양수라 하고 $-\mathbb{P}=\{a\mid -a\in\mathbb{P}\}$ 의 원소를 음수라고 한다.

순서공리를 이용하여 두 실수 사이의 대소관계를 다음과 같이 정의한다.

4. 정 의. 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) $a-b\in\mathbb{P}$이면 a가 b보다 크다, 또는 b가 a보다 작다고 말하고 기호로는
$a>b$ 또는 $b<a$ 로 나타낸다.

(2) $a>b$ 또는 $a=b$ 이면 $a\geq b$ 또는 $b\leq a$ 로 나타낸다.

O_2에 의해 $a-b\in\mathbb{P},\ a-b=0,\ -(a-b)\in\mathbb{P}$ 중 하나만 성립하므로 다음 중 하나만 성립한다.

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b$$

5. 정 리. 네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $a<b$이고 $b<c$이면 $a<c$이다.

(2) $a\le b$이고 $b\le a$이면 $a=b$이다.

(3) $a<b,\ c\le d$ 이면 $a+c<b+d$ 이다.

(4) $0<a<b,\ 0<c\le d$ 이면 $ac<bd$ 이다.

(5) $a>b$이고 $c<0$이면 $ac<bc$이다.

증 명 (1), (4)만 증명하고 나머지는 연습문제로 남긴다.

(1) $a<b$ 이고 $b<c$ 이면 $b-a\in\mathbb{P},\ c-b\in\mathbb{P}$이므로 순서공리 O_1에 의해

$$c-a=(b-a)+(c-b)\in\mathbb{P}$$

이다. 따라서 $a<c$ 이다.

(4) $b-a\in\mathbb{P},\ c\in\mathbb{P}$이므로 순서공리 O_1에 의해 $(b-a)c\in\mathbb{P}$ 즉, $ac<bc$ 이다.

또, $c=d$ 이면 $bc=bd$ 이고, $c<d$ 이면 $bc<bd$ 이므로 $ac<bc\le bd$ 즉, $ac<bd$ 이다.

6. 정 리. 두 실수 $a,\ b$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $a\neq 0$ 이면 $a^2>0$ 이다. 특히 $1>0$ 이다.

(2) $a>0$ 이고 $b<0$ 이면 $ab<0$ 이다.

(3) $a<0$ 이고 $b<0$ 이면 $ab>0$ 이다.

(4) $a>0$ 이면 $\frac{1}{a}>0$ 이다.

(5) $a>0$ 이고 $b<0$ 이면 $\frac{a}{b}<0$ 이다.

(6) $a<0$ 이고 $b>0$ 이면 $\frac{a}{b}<0$ 이다.

(7) $a<0$ 이고 $b<0$ 이면 $\frac{a}{b}>0$ 이다.

증 명 (1), (2), (4)만 증명하고 나머지는 연습문제로 남긴다.

(1) $a>0$ 이면 순서공리 O_1에 의해 $a^2=aa\in\mathbb{P}$이므로 $a^2>0$ 이다. 또 $a<0$ 이면 $-a\in\mathbb{P}$ 이고 $a^2=(-a)^2=(-a)(-a)$ 이므로 순서공리 O_1에 의해 $a^2>0$ 이다.

따라서 $a\neq 0$ 이면 $a^2>0$ 이다.

(2) $a\in\mathbb{P},\ -b\in\mathbb{P}$이므로 순서공리 O_1에 의해 $a(-b)=-ab\in\mathbb{P}$ 즉, $ab<0$이다.

(4) $a\neq 0$이므로 정 리 2(9) 에 의해 a^{-1}가 존재하고 $a^{-1}\neq 0$이므로 순서공리에 O_2에 의해

$$\frac{1}{a}\in\mathbb{P},\quad -\frac{1}{a}\in\mathbb{P}$$

중 하나만 성립한다. 그런데 $\frac{1}{a}<0$ 이면

$$1=a\cdot\frac{1}{a}<0$$

이다. 이것은 (1)의 $1>0$ 에 모순이므로 $\frac{1}{a}>0$ 이다.

7. 정 리. 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $a < \epsilon$이면 $a \leq 0$이다.

증 명 $a > 0$이라고 하면 $\epsilon = a$에 대해 $a < a$이므로 모순이다. 따라서 $a \leq 0$이다.

$b^n - a^n = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k}a^k$ 을 이용하여 다음 정리를 보일 수 있다.

8. 정 리. 두 양수 $a,\ b$에 대해 다음이 성립한다.

$$a < b \ \Leftrightarrow \ a^n < b^n \text{ 인 자연수 } n \text{ 이 존재한다.}$$
$$\Leftrightarrow \text{ 모든 자연수 } n \text{ 에 대해 } a^n < b^n \text{ 이다.}$$

9. 정 리. 두 양수 $a,\ b$에 대해 다음이 성립한다.

$$a = b \ \Leftrightarrow a^n = b^n \text{ 인 } 0 \text{ 이 아닌 정수 } n \text{ 이 존재한다.}$$
$$\Leftrightarrow 0 \text{ 이 아닌 모든 정수 } n \text{ 에 대해 } a^n = b^n \text{ 이다.}$$

10. 정 의. 실수 a에 대해 절댓값 $|a|$을 다음과 같이 정의한다.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

절댓값은 다음 정리와 같은 성질을 갖는다. 그 증명은 연습문제로 남긴다.

11. 정 리. 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $|a| \geq 0$ (2) $|-a| = |a|$
(3) $|ab| = |a||b|$ (4) $|a|^2 = a^2$
(5) $b \geq 0$ 이면 $|a| \leq b$ 와 $-b \leq a \leq b$ 는 서로 동치이다.
(6) $-|a| \leq a \leq |a|$
(7) $||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$

핵심내용

1. 실수의 대수적 성질

2. 순서공리. 다음 두 조건을 만족시키는 집합 $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$가 존재한다.
O_1 모든 $a \in \mathbb{P}$, $b \in \mathbb{P}$에 대해 $a+b \in \mathbb{P}$, $ab \in \mathbb{P}$이다.
O_2 모든 $a \in \mathbb{R}$에 대해 다음 중 하나만 성립한다.

$$a \in \mathbb{P}, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{P}$$

3. 실수의 순서 성질

4. 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $0 \le a < \epsilon$이면 $a = 0$이다.

연습문제

1. 정 리 2, 정 리 5, 정 리 6의 나머지를 증명하라.

2. 두 실수 a, b에 대해 $a-(-b) = a+b$임을 보여라.

3. 세 실수 a, b, c에 대해 $a+b = a+c$이면 $b = c$임을 보여라.

4. 세 실수 a, b, c에 대해 $ab = ac$이고 $a \neq 0$이면 $b = c$임을 보여라.

5. 두 실수 a, $b(b \neq 0)$에 대해 $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$임을 보여라.

6. $r^2 = 2$인 유리수 r가 존재하지 않음을 보여라.

7. $5 > 0$임을 보여라.

8. 두 실수 a, b에 대해 $a > b$이면 $b < \frac{a+b}{2} < a$임을 보여라.

9. 실수 a에 대해 $0 < a < 1$이면 $0 < a^2 < a$이고 $1 < a$이면 $a < a^2$임을 보여라.

10. 두 양수 a, b가 $a^2 = b^2$을 만족시키면 $a = b$임을 보여라.

11. 두 실수 a, b가 $a^2 + b^2 = 0$을 만족시키면 $a = b = 0$임을 보여라.

12. 두 실수 a, b에 대해 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \ge b \\ b, & a < b \end{cases}$, $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \le b \\ b, & a > b \end{cases}$라 하자.
$\min\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$, $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$임을 보여라.

무소유의 삶

법정 스님

무소유란 아무것도 갖지 않는다는 것이 아니다.
궁색한 빈털터리가 되는 것이 아니다.
무소유란 아무것도 갖지 않는다는 것이 아니라
불필요한 것을 갖지 않는다는 뜻이다.

무소유의 진정한 의미를 이해할 때
우리는 보다 홀가분한 삶을 이룰 수 있다.
우리가 선택한 맑은 가난은
부보다 훨씬 값지고 고귀한 것이다.
이것은 소극적인 생활 태도가 아니라
지혜로운 삶의 선택이다.

만족할 줄 모르고 마음이 불안하다면
그것은 우리가 살고 있는 세상과
조화를 이루지 못하지 때문이다.
내 마음이 불안하고 늘 갈등 상태에서 만족할 줄 모른다면
그것은 내가 살고 있는 이 세상과
조화를 이루지 못하기 때문이다.

우리는 우리 주위에 있는 모든 것의 한 부분이다.

저마다 독립된 개체가 아니다.
전체의 한 부분이다.
우리 한 사람 한 사람이 세상의 한 부분이다.

세상이란 말과 사회란 말은 추상적인 용어이다.
구체적으로 살고 있는 개개인이 구체적인 사회이고 현실이다.
우리는 보이든 보이지 않든,
혈연이든 혈연이 아니든,
관계 속에서 서로 얽히고설켜 이루어진다.
그것이 우리의 존재이다.

3. 완비성공리

이 절에서는 상계, 하계, 유계, 상한, 하한을 정의하고 완비성공리, Archimedes성질, 유리수와 무리수의 조밀성에 대해 알아본다.

$S=(1, 2)$는 모든 $x\in S$에 대해 $x<2$ 이다. 그러나 자연수전체집합 $\mathbb{N}$은

모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $n<a$

인 $a\in\mathbb{R}$는 존재하지 않는다. 이러한 성질을 구별하기 위하여 다음 정의가 필요하다.

1. 정 의. 공집합이 아닌 $\mathbb{R}$의 부분집합 S 에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) 모든 $x\in S$에 대해

$$x\le a$$

인 $a\in\mathbb{R}$가 존재하면 S는 위로 유계(bounded above)라하고, a를 S의 상계(upper bound)라고 한다.

(2) 모든 $x\in S$에 대해

$$x\ge a$$

인 $a\in\mathbb{R}$가 존재하면 S는 아래로 유계(bounded below)라하고, a를 S의 하계(lower bound)라고 한다.

(3) S가 위로 유계이고 아래로 유계이면 S는 유계(bounded)라고 한다.

(4) S가 위로 유계일 때, 한 상계 α가 다른 모든 상계보다 작으면 그 상계를

상한(supremum) 또는 최소상계(least upper bound)

라하고

$$\alpha=\sup S \text{ 또는 } \alpha=\mathrm{lub}S$$

로 나타낸다.

(5) S가 아래로 유계일 때, 한 하계 β가 다른 모든 하계보다 크면 그 하계를

하한(infimum) 또는 최대하계(greatest lower bound)

라하고

$$\beta=\inf S \text{ 또는 } \beta=\mathrm{glb}\,S$$

로 나타낸다.

(6) S가 위로 유계가 아니면 $\sup S=\infty$로 나타내고, 아래로 유계가 아니면 $\inf S=-\infty$로 나타낸다.

상한과 하한의 정의에 의해 R의 두 부분집합 $\varnothing\neq A\subset B$에 대해 다음이 성립한다.

$$\inf B\le\inf A\le\sup A\le\sup B$$

2. 완비성공리. 위로 유계인 집합 $S(\neq \varnothing)$에 대해 S의 상한이 존재한다.

3. 보 기. (1) $\mathbb{N}$은 아래로 유계이나 위로 유계는 아니다. 이때,

$$1,\ 0,\ -1,\ -2,\cdots$$

은 모두 $\mathbb{N}$의 하계이다.

(2) $S=(0,\ 1]$ 은 유계이다.

$$a \le 0 \text{ 인 } a \text{ 는 모두 } S \text{의 하계}$$

이고

$$a\in\mathbb{R}\text{이 } S \text{의 하계이면 } a \le 0$$

이다. 따라서 하계 중 가장 큰 수는 0 이므로 하한은 0이다.

$$a \ge 1 \text{ 인 } a \text{ 는 } S \text{의 상계}$$

이고

$$a\in\mathbb{R}\text{이 } S \text{의 상계이면 } a \ge 1$$

이다. 따라서 상계 중 가장 작은 수는 1 이므로 상한은 1 이다.

(3) $S=\left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ 은 유계, $\sup S=1,\ \inf S=0$이고 $1\in S,\ 0\notin S$이다.

(4) $(1,\ 2),\ [1,\ 2),\ (1,\ 2],\ [1,\ 2]$는 모두 유계이고, 상한은 2, 하한은 1이다.

4. 정 리. 유계인 집합 $S(\neq \varnothing)$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) $\alpha=\sup S$
(2) 모든 $x\in S$에 대해 $x \le \alpha$ 이고, 임의의 $\epsilon>0$ 에 대해 $\alpha-\epsilon<a$ 인 $a\in S$가 있다.

증명 (1) $\Rightarrow$ (2) α가 S의 상계이므로 모든 $x\in S$에 대해 $x \le \alpha$ 이다.
또 임의의 $\epsilon>0$ 에 대해 $\alpha-\epsilon$은 S의 상계가 아니므로 $\alpha-\epsilon<a$ 인 $a\in S$가 있다.
(2) $\Rightarrow$ (1) 모든 $x\in S$에 대해 $x \le \alpha$ 이므로 α는 S의 상계이다.
또 $\beta<\alpha$이면 $\epsilon=\alpha-\beta$에 대해 $\alpha-\epsilon=\alpha-(\alpha-\beta)=\beta<a$ 인 $a\in S$가 있으므로 β가 S의 상계가 아니다.
따라서 α가 S의 다른 모든 상계보다 작으므로 $\alpha=\sup S$이다.

5. 따름정리. 유계인 집합 $S(\neq \varnothing)$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) $\beta=\inf S$
(2) 모든 $x\in S$에 대해 $\beta \le x$ 이고, 임의의 $\epsilon>0$ 에 대해 $a<\beta+\epsilon$ 인 $a\in S$가 있다.

6. 정 리. 실수 t와 유계이고 공집합이 아닌 실수의 부분집합 A, B에 대해

$$tA=\{tx|x\in A\},\ A+B=\{x+y|x\in A,\ y\in B\},$$

라 하면 다음이 성립한다.

(1) $t<0$이면 $\sup tA=t\inf A$이고 $\inf tA=t\sup A$이다.

(2) $t\geq 0$이면 $\sup tA=t\sup A$이고 $\inf tA=t\inf A$이다.

(3) $\sup(A+B)=A+B,\ \inf(A+B)=\inf A+\inf B$

증 명 (1) $\inf A\leq x\leq \sup A,\ t<0$이므로 $x\in A$에 대해 $t\sup A\leq tx\leq t\inf A$이다. 따라서

$$t\sup A\leq \inf tA\leq \sup tA\leq t\inf A\ \cdots\ ①$$

이다. $s=\frac{1}{t},\ B=tA$로 놓으면 $sB=A$이고, ①에 의해

$$s\sup B\leq \inf sB=\inf A\leq \sup sB=\sup A\leq s\inf B$$

이므로 $ts\sup B\geq t\inf sB=t\inf A\geq t\sup sB=t\sup A\geq ts\inf B$ 즉,

$$\sup tA\geq t\inf A\geq t\sup A\geq \inf tA$$

이다. 따라서 $\sup tA=t\inf A,\ \inf tA=t\sup A$이다.

(2) $t>0$이면 $t=(-t)\times(-1)$이므로 (1)에 의해

$$\sup tA=(-t)\inf(-A)=(-t)\times(-1)\sup A=t\sup A$$

이고, 같은 방법으로$\inf tA=t\inf A$이다. 또 $t=0$이면 $\alpha_{tA}=\beta_{tA}=0$이므로 자명하다.

(3) 임의의 $x\in A,\ y\in B$에 대해 $x\leq \sup A,\ y\leq \sup B$이므로

$$x+y\leq \sup A+\sup B$$

이다. 따라서 $\sup A+\sup B$는 $A+B$의 상계이므로

$$\sup(A+B)\leq \sup A+\sup B\ \cdots\ ②$$

또 임의의 $\epsilon>0$에 대해

$$\sup A-\epsilon<x,\ \sup B-\epsilon<y$$

인 $x\in A,\ y\in B$가 존재한다. 따라서

$$(\sup A-\epsilon)+(\sup B-\epsilon)<x+y\leq \sup(A+B)$$

즉 임의의 $\epsilon>0$에 대해 $\sup A+\sup B-2\epsilon<\sup(A+B)$이므로

$$\sup A+\sup B<\sup(A+B)\ \cdots\ ③$$

따라서 ②와 ③에 의해 $\sup(A+B)=A+B$이다.

또 $-A+(-B)=-(A+B)$이고, (1)에 의해 $\inf A=-\sup(-A)$이므로

$$\inf A+\inf B=-\sup(-A)-\sup(-B)=-\sup\{(-A)+(-B)\}=-\sup\{-(A+B)\}=\inf(A+B)$$

이다.

정 리 6에 의해 $\inf A = -\sup(-A)$ 이므로 다음이 성립한다.

7. 정 리. 아래로 유계인 집합 $S(\neq \varnothing)$에 대해 S의 하한이 존재한다.

8. 정 리. 두 실수 a와 b에 대해 다음이 성립한다.

(1) Archimedes성질. $b>0$이면 $a<nb$ 즉, $\frac{a}{n}<b$인 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.

(2) $b-a>1$인 두 실수 a와 b 사이에는 정수가 존재한다.

(3) 유리수의 조밀성. $a<b$이면 $a<\frac{m}{n}<b$ 인 정수 m과 자연수 n이 존재한다.

증 명 (1) 모든 자연수 n에 대해 $nb\le a$라면 a는 집합 $S=\{nb \mid n\in\mathbb{N}\}$의 상계이다.
S가 유계이므로 완비성공리에 의해 $\alpha=\sup S$가 존재하고, 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해

$$(n+1)b \le \alpha \text{ 즉, } nb \le \alpha - b$$

이므로 $\alpha-b$가 S의 상계이다.
따라서 $\alpha\le\alpha-b$가 되어 모순이므로 $a<nb$인 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.
식 $a<nb$에 $a=1$을 대입하면 $1<nb$ 즉, $\frac{1}{n}<b$ 이다.

(2) (1)에서 $b=1$을 대입하면 $a<n$인 자연수 n이 존재하고 $n-a>0$이다. 이제

$$S=\{k\in\mathbb{N} \mid n-a\le k$$

라고 하면 (1)에 의해 $S\neq\varnothing$이므로 자연수의 정렬성에 의해 S는 최소원 m을 갖고

$$m-1<n-a\le m$$

이다. 따라서

$$n-m\le a<n-m+1,\ n-m+1\le a+1,\ a+1<b=a+(b-a)$$

이므로 $a<n-m+1<b$이다.

(3) $0<b-a$ 이므로 (1)에 의해 $nb-na=n(b-a)>1$인 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.
따라서 (2)에 의해

$$na<m<nb$$

인 $m\in\mathbb{Z}$이 존재하므로 $a<\frac{m}{n}<b$ 이다.

정 리 9. $a^2=2$인 양수 a가 유일하게 존재한다.

증 명 (존재성) $S=\{x\geq 0 \mid x^2<2\}$라고 하자. $2<2^2$이므로 $x\in S$이면 $x^2<2^2$이다. 따라서 $x<2$이므로 S는 위로 유계이다. 또 $1\in S$이므로 완비성공리에 의해 $a=\sup S$가 존재하고 $a\geq 1$이며, 순서공리에 의해

$$a^2-2>0,\ a^2=2,\ 2-a^2>0$$

중 하나만 성립한다.

[1] $a^2-2>0$이면 Archimedes성질에 의해 $k(a^2-2)>2a$이고 $a>\frac{1}{k}$인 자연수 k가 존재한다. 이 k에 대해 $t=a-\frac{1}{k}$라 하면 $0<t<a$이므로

$$a^2-t^2=(a-t)(a+t)<\frac{1}{k}\cdot 2a<\frac{1}{k}\cdot k(a^2-2)=a^2-2$$

이다. 따라서 $t^n>2$이므로 t가 S의 상계가 되어 모순이다.

[2] $2-a^2>0$이면 Archimedes성질에 의해 $k(2-a^2)>2a+1$인 자연수 k가 존재한다. 이 k에 대해 $t=a+\frac{1}{k}$라 하면 $0\leq a<t\leq a+1$이므로

$$t^2-a^2=(t-a)(t+a)<\frac{1}{k}\cdot(2a+1)<\frac{1}{k}\cdot k(2-a^2)=2-a^2$$

이다. 따라서 $t^2<2$이므로 $t\in S$이고, 이것은 $t<a=\sup S$가 되어 모순이다.

따라서 $a^2=2$이다. 또 $2>0$이고 $a\geq 0$이므로 $a>0$이다.

(유일성) $b^2=2,\ b>0$이면

$$0=a^2-b^2=(a-b)(a+b),\ a+b>0$$

이므로 $a=b$이다.

이 a를 $\sqrt{2}$로 나타하고 2의 양의 제곱근이라고 한다.

일반적으로 양수 a와 자연수 n에 대해 $b^n=a$ 인 양수 b가 유일하게 존재한다.

이 b를 $\sqrt[n]{a}$ 또는 $a^{\frac{1}{n}}$로 나타하고 a 의 양의 n-제곱근이라고 한다.

2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2}$가 무리수임은 어렵지 않게 증명된다. 이 사실을 이용하여 무리수의 조밀성을 보일 수 있다.

10. 무리수의 조밀성. 서로 다른 두 실수 a와 b 사이에는 항상 무리수가 존재한다.

증 명 유리수의 조밀성에 의해 $a-\sqrt{2}<r<b-\sqrt{2}$ 인 $r\in Q$가 존재하고 $r+\sqrt{2}$가 무리수이며, $a<r+\sqrt{2}<b$이다.

핵심내용

1. 위로 유계, 아래로 유계, 유계, 상계, 하계, 상한, 최소상계, 하한, 최대하계,
$\sup S$, $\mathrm{lub} S$, $\inf S$, $\mathrm{glb}\, S$

2. 실수 t와 유계이고 공집합이 아닌 실수의 부분집합 A, B에 대해
$$tA=\{tx|x\in A\},\ A+B=\{x+y|x\in A,\ y\in B\},$$
라 하면 다음이 성립한다.
(1) $t<0$ 이면 $\sup tA=t\inf A,\ \inf tA=t\sup A$이다.
(2) $t\geq 0$ 이면 $\sup tA=t\sup A,\ \inf tA=t\inf A$이다.
(3) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B,\ \inf(A+B)=\inf A+\inf B$

3. 완비성공리. 위로 유계인 집합$S(\neq\varnothing)$에 대해 S의 상한이 존재한다.

4. 두 실수 a와 b에 대해 다음이 성립한다.

(1) Archimedes성질. $b>0$이면 $a<nb$ 즉, $\frac{a}{n}<b$인 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.

(2) $b-a>1$인 두 실수 a와 b 사이에는 정수가 존재한다.

(3) 유리수의 조밀성. $a<b$이면 $a<\frac{m}{n}<b$인 정수 m과 자연수 n이 존재한다.

5. $a^2=2$인 양수 a가 유일하게 존재한다.
일반적으로 양수 a와 자연수 n에 대해 $b^n=a$인 양수 b가 유일하게 존재한다.

6. 무리수의 조밀성. 서로 다른 두 실수 a와 b 사이에는 항상 무리수가 존재한다.

연습문제

1. 다음 집합의 상한과 하한을 구하라.

(1) $S=\left\{\dfrac{1}{2n+1} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ (2) $S=\left\{\dfrac{n-1}{n+1} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ (3) $S=\left\{\dfrac{3n^2+1}{n^2+1} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

2. 실수 α가 집합 $A\,(\neq\varnothing)$의 상계이고 $\alpha\in A$ 이면 α는 A의 상한임을 보여라.

3. $0<a<1$에 대해 $S=\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$라 할 때, $\inf S=0$임을 보여라.

4. 닫힌구간 $[0,7]$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대해

$$AB=\{ab \mid a\in A,\ b\in B$$

라 할 때, $\sup AB=\sup A\cdot\sup B$, $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$ 임을 보여라.

5. 실수 $a>1$와 $x\in\mathbb{R}$에 대해

$$a(x)=\sup\{a^r \mid r\le x,\ r\in\mathbb{Q}\}$$

로 정의하자. $b>1$일 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $a(x+y)=a(x)a(y)$임을 보여라.

(2) $(ab)(x)=a(x)b(x)$임을 보여라.

☆(3) $x>0$일 때, $(a(x))(y)=a(xy)$임을 보여라.

6. 다음 물음에 답하라.

(1) a가 유리수이고 b가 무리수이면 $a+b$는 무리수임을 보여라.

(2) a는 유리수, b는 무리수, ab는 유리수인 두 수 a, b를 구하라.

7. 두 양수 a, $b(a<b)$와 무리수 α에 대해 $a<r\alpha<b$ 인 유리수 r가 존재함을 보여라.

8. 실수 a에 대해 $m-1\le a<m$인 정수 m이 존재함을 보여라.

9. 다음을 만족시키는 양수 t가 존재함을 보여라.

(1) $t^2=3$ (2) $t^3=2$ (3) $t^4=3$ (4) $t^5=2$

10. $a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n$인 a_n, b_n에 대해 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$라고 하면 A는 위로 유계이고, $\sup A\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$임을 보여라.

☆11. 문제 10을 이용하여 닫힌구간 $[0,1]$은 비가산집합임을 보여라.

☆12. 양수 a와 자연수 n에 대해 $b^n=a$ 인 양수 b가 유일하게 존재함을 보여라.

시민권으로서의 소득

녹색평론133호 21-22쪽 발췌

'독일에서 갤럽'의 최근 조사에 의하면, 현재 근무하고 있는 기업에 친근감이 없는 사람의 비율은 19%인 반면, 자기의 직장에 강한 애착을 느끼는 사람의 비율은 13%로, 독일인의 13%만이 참된 의미에서 직장을 갖고 있고, 19%는 순수하게 수입을 얻기 위해 직장을 갖고 있다고 할 수 있다.

우리가 일을 필요로 하는 것은 자신의 재능과 능력을 발전시키고 싶기 때문이다. 우리는 자신의 활동 속에서 보람을 느끼고자 하는 욕구를 갖고 있다. 이와는 달리 우리가 수입을 필요로 하는 것은 바로 생존 때문이다. 예수는 마태복음 제20장에서 "하늘나라는 다음과 같이 비유될 수 있다"면서 포도원 노동자에 대한 이야기를 하고 있다. -- 어떤 포도원 주인이 노동자를 고용하기 위해 새벽에 나갔다. 그는 아침 6시에 처음 만난 노동자들과 일당 1데나리온을 주기로 합의한다. 그로부터 3시간 후 그는 다시 시장에 나가서 '실업자들'을 고용한다. 그는 노동자들에게 말한다. "그대들도 포도원으로 와서 일하면 합당한 임금을 지불할 것이다."그 포도원에는 일이 많아서 정오, 오후 3시 그리고 오후 5시에도 시장에 나가서 노동자들을 추가로 모집했다.

오늘날 우리의 직장모델로 판단하면, 지금 어떤 일이 생길 것인가는 명백하다. 즉, 종일 포도원에서 일한 노동자는 합의된 1데나리온을 손에 쥐게 되고, 파트타임 노동자의 경우는 노동시간에 따른 임금이 지불될 것이다. 그런데 예수의 비유에서는 이야기가 전혀 달리 전개된다. 포도원 주인의 사고와 노동자의 논리는 매우 설득력이 있어서 여기에 전부를 인용한다.

저녁이 되자 포도원 주인이 감독에게 "일꾼들을 불러 최후에 온 사람부터 최초에 온 사람까지 순서대로 임금을 지불하라"고 말했다. 그래서 오후 5시경에 고용된 사람들이 1데나리온씩을 받았다. 최초에 고용된 사람들은 자신들이 더 많이 받을 것이라고 생각했다. 그러나 그들에게도 1데나리온씩이었다. 그러자 그들은 주인에게 불평을 말했다. "최후에 온 사람들은 한 시간밖에 일하지 않았습니다. 하루 종일 더위를 무릅쓰고 일한 우리와 저 사람들을 같게 취급하다니요."주인은 그 사람에게 대답했다. "친구여 그대에게 부당한 짓을 한 게 아닙니다. 그대는 나와 1데나리온을 받기로 약속을 하지 않았나요? 자신의 몫을 받았으니 돌아가시오. 나는 최후에 온 사람에게도 그대와 같이 지불하겠다고 했소. 자신의 것을 자신이 하고 싶은 대로 한 것이 잘못인가요?"

4. 수열과 급수의 수렴과 극한

이 절에서는 수열과 급수의 수렴과 극한에 대해 알아본다.

바탕내용

바탕 1. Archimedes성질. 두 실수 a와 $b(b>0)$에 대해 $a<nb$ 인 $n\in\mathbb{N}$이 존재하고, $\frac{1}{n}<b$ 인 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.

함수 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$을 수열이라 하고 $f(n)=x_n$ 을 수열 f 의 n 번째 항이라고 한다. 또 수열 f 를 $<x_n>$ 으로, f 의 치역 $f(\mathbb{N})$을 $\{x_n$ 으로 나타낸다.

1. 정 의. 수열 $<x_n>$과 실수 $a\in\mathbb{R}$에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) 집합 $\{x_n$ 이 유계이면 수열 $<x_n>$ 이 유계라고 한다.

(2) 임의의 양수 ϵ 에 대해

$$n>k\text{인 모든 } n\in\mathbb{N}\text{에 대해 } |x_n-a|<\epsilon\text{인 자연수 } k(\epsilon)=k$$

가 존재하면 $<x_n>$은 a 로 수렴한다(converge to a)하고 a를 $<x_n>$의 극한(limit)이라 하며, $x_n\to a$ 또는 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$로 나타낸다.

(3) $<x_n>$ 이 a 로 수렴하지 않으면 $x_n\not\to a$ 로 나타내고, $<x_n>$ 이 어떤 수로도 수렴하지 않으면 발산한다(diverge)고 한다.

(4) 임의의 양수 M에 대해 $n>k$인 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n>M$인 자연수 $k(M)=k$가 존재하면 $<x_n>$은 ∞ 로 발산한다 하고 $x_n\to\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$로 나타낸다.

(5) $y_n=-x_n$ 인 수열 $<y_n>$ 이 ∞ 로 발산하면 $<x_n>$ 은 $-\infty$ 로 발산한다고 하고 $x_n\to-\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$로 나타낸다.

(6) 수열 $<x_n>$의 각 항을 $+$로 연결한 식

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n+\cdots$$

을 무한급수(infinite series) 또는 급수라 하고, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 으로 나타내며, 이 무한급수에서

$$s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

을 제 n항까지의 부분합이라 하고 x_n을 이 무한급수의 제 n항이라고 한다.

(7) 부분합 수열 $<s_n>$ 이 a로 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 이 a로 수렴한다 또는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 의 합이 a라 하고, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=a$로 나타낸다. 또 급수가 수렴하지 않으면 발산한다고 한다.

주 : '임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $n > k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $|x_n - a| < \epsilon$ 인 자연수 $k(\epsilon) = k$가 존재한다'와 '임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $\sup\{|x_n - a|\}_{n=k}^{\infty} < \epsilon$ 인 자연수 $k(\epsilon) = k$가 존재한다'는 동치이다.

2. 보 기. (1) 실수 a에 대해 $x_n = a$인 수열 $< x_n >$ 은 a로 수렴함을 다음과 같이 보인다.
주어진 $\epsilon > 0$에 대해 $k(\epsilon) = 1$이라 하자. 이 때 $n > k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_n - a| = 0 < \epsilon$$

이므로 $< a >$ 는 a로 수렴한다.

(2) $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ 은 0으로 수렴을 다음과 같이 보인다.
주어진 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $n > k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

인 자연수 $k(\epsilon) = k$가 존재하면 $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ 은 0으로 수렴한다.
주어진 $\epsilon > 0$에 대해 Archimedes성질에 의해

$$\frac{1}{k} < \epsilon$$

인 자연수 k가 존재한다. 이때 $n > k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \epsilon$$

이므로 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ 이다.

(3) 임의의 양수 M에 대해 $k > M$인 자연수 k가 존재한다.
이때 $n > k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x_n = n > k > M$이므로 $< n >$ 은 ∞로 발산한다.

극한의 정의에 의해 다음이 성립한다.

3. 정 리. 수열 $< x_n >$ 과 실수 a에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) $x_n \rightarrow a$
(2) $x_n - a \rightarrow 0$
(3) 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin (a - \epsilon, a + \epsilon)$이 유한집합이다.

4. 보조정리. $x_n \to a,\ y_n \to b,\ m \in \mathbb{N},\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$이다. $n \geq m$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|z_n - c| \leq \alpha |x_n - a| + \beta |y_n - b|$$

을 만족시키면 $z_n \to c$이다.

특히 $y_n \to b$이고 $n \geq m$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $|z_n - c| \leq |y_n - b|$ 이면 $z_n \to c$이다.

증 명 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $x_n \to a$이므로 $n > k_1$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2 + 2\alpha}$$

인 자연수 k_1 이 존재한다. 또 $y_n \to b$이므로 $n > k_2$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2 + 2\beta}$$

인 자연수 k_2 가 존재한다. 따라서 $n > k = \max\{k_1, k_2, m\}$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|z_n - c| \leq \alpha |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2 + 2\alpha} + \frac{\epsilon}{2 + 2\beta} \leq \epsilon$$

이므로 $z_n \to c$이다.

5. 정 리. (1) $x_n \to a,\ y_n \to b,\ \alpha \in R$ 이면 $\alpha x_n + y_n \to \alpha a + b$ 이다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s,\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = t$이고 α가 상수이면 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + y_n) = \alpha s + t$이다.

증 명 (1) 방법1 $x_n \to a,\ y_n \to b$이고

$$|(\alpha x_n + y_n) - (\alpha a + b)| \leq |\alpha| |x_n - a| + |y_n - b|$$

이므로 보조정리 4에 의해 $\alpha x_n + y_n \to \alpha a + b$ 이다.

방법2 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $n > k_1,\ n > k_2$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 각각

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{|\alpha| + 1}, \quad |y_n - b| < \frac{\epsilon}{|\alpha| + 1}$$

인 자연수 $k_1,\ k_2$가 존재한다.

$$k = \max\{k_1, k_2\}$$

라 하면 $n > k$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|(\alpha x_n + y_n) - (\alpha a + b)| \leq |\alpha| |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{|\alpha| \epsilon + \epsilon}{|\alpha| + 1} = \epsilon$$

이다. 따라서 $\alpha x_n + y_n \to \alpha a + b$ 이다.

(2) $s_n = \sum_{k=1} x_k,\quad t_n = \sum_{k=1}^{n} y_k,\quad w_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + y_k)$라 하면 $w_n = \alpha s_n + t_n$이다. 조건에서 $s_n \to s,\ t_n \to t$이므로 (1)에 의해 $w_n \to \alpha s + t$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + y_n) = \alpha s + t$이다.

6. 보 기. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$에서 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로 $s_n=1-\frac{1}{n+1}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} s_n=1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}=1$이다.

7. 정 리. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ 이다.

증 명 $x_n=s_n-s_{n-1}\,(n\geq 2)$이므로 $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty} s_n-\lim_{n\to\infty} s_{n-1}=0$이다.

8. 압축정리. 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n\leq y_n\leq z_n$ 인 수열 $<x_n>$, $<y_n>$, $<z_n>$에서 $x_n\to a$, $z_n\to a$이면 $y_n\to a$ 이다.

증 명1 $x_n\leq y_n\leq z_n$ 이므로

$$0\leq y_n-x_n\leq z_n-x_n$$

이고 정 리 5에 의해

$$z_n-x_n\to a-a=0$$

이다. 또 $0\leq y_n-x_n\leq z_n-x_n$이므로 보조정리 4에 의해

$$y_n-x_n\to 0$$

이다. 그런데

$$y_n=(y_n-x_n)+x_n$$

이므로 정 리 5에 의해 $y_n\to 0+a=a$ 이다.

증 명2 주어진 $\epsilon>0$ 에 대해 $x_n\to a$ 이므로 $n>k_1$ 인 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해

$$x_n\in(a-\epsilon,\,a+\epsilon)\;\Leftrightarrow\;|x_n-a|<\epsilon$$

인 자연수 k_1 이 존재하고, $z_n\to a$ 이므로 $n>k_2$ 인 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해

$$z_n\in(a-\epsilon,\,a+\epsilon)\;\Leftrightarrow\;|z_n-a|<\epsilon$$

인 자연수 k_2 가 존재한다.

따라서 $n>\max\{k_1,\,k_2$인 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n\leq y_n\leq z_n$ 에서

$$y_n\in(a-\epsilon,\,a+\epsilon)$$

이므로 $y_n\to a$ 이다.

9. 보 기. (1) $0 \le \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n}$ 이고 $\frac{1}{n} \to 0$ 이므로 $\frac{1}{n^2+1} \to 0$ 이다.

(2) $\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right| = \frac{2}{n+1} < 2 \cdot \frac{1}{n}$ 이고 $\frac{1}{n} \to 0$ 이므로 $\frac{n-1}{n+1} \to 1$ 이다.

(3) $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$ 이고 $\frac{1}{n} \to 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ 이다.

(4) $a > 0$ 와 자연수 n 에 대해 $(1+a)^n \ge 1+na$ 이므로

$$\frac{1}{(1+a)^n} \le \frac{1}{1+na} < \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n}$$

이다. 따라서 $0 < b < 1$이면 $b = \frac{1}{1+a}$인 $a>0$가 존재하므로 $b^n \to 0$ 이다.

(5) $a > 1$과 자연수 n 에 대해

$$a < \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \text{이므로 } 1 < a^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{a}{n}$$

이다. 그러므로 압축정리에 의해 $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ 이다.

(6) (5)에 의해 $2^{\frac{1}{n}} \to 1$ 이고 $3 < (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} < 3 \cdot 2^{\frac{1}{n}}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$ 이다.

(7) $0 < a < 1$과 자연수 n 에 대해

$$1 < \frac{1}{a} < \left(1+\frac{1}{na}\right)^n \text{이므로 } 1 < \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{na} = \frac{na+1}{na}$$

이다. 따라서 $\frac{na}{na+1} < a^{\frac{1}{n}} < 1$이므로 압축정리에 의해 $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ 이다.

10. 정 리. 수렴하는 수열은 그 극한이 유일하다.

증 명1 수렴하는 수열$< x_n >$ 에서 $x_n \to a,\ x_n \to b$ 이고 $y_n = a - b$ 라고 하자.

$$|y_n| \le |a - x_n| + |x_n - b|$$

이므로 보조정리 4에 의해 $y_n \to 0$ 이다. 따라서

$$a = b$$

이므로 수렴하는 수열은 그 극한이 유일하다

증 명2 수렴하는 수열 $< x_n >$ 에서 $x_n \to a$ 이고 $x_n \to b$ 라 하자.

$a - b = (a - x_n) + (x_n - b)$이고 $a - x_n \to 0,\ x_n - b \to 0$이다.

따라서 $a - b \to 0$이므로 $a = b$이다.

증 명3 수렴하는 수열 $< x_n >$ 에서 $x_n \to a$ 이고 $x_n \to b$ 라 하자.

주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $n > k_1,\ n > k_2$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 각각

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2},\ |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

인 자연수 $k_1,\ k_2$가 존재한다.

$$k = \max\{k_1,\ k_2\}$$

라 하면 $n > k$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|a - b| \le |a - x_k| + |x_k - b| < \epsilon$$

이다. 즉 $x_n \to a,\ x_n \to b$이면

$$\text{임의의 } \epsilon > 0 \text{ 에 대해 } |a - b| < \epsilon$$

이므로 $a = b$이다.

11. 정 리. 수렴하는 수열은 유계이다.

증 명 수열 $< x_n >$ 이 a 로 수렴한다고 하자. $\epsilon = 1$ 에 대해 $n > k$ 이면

$$| x_n - a | < 1$$

인 자연수 k 가 존재한다. 따라서 $n > k$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_n| < |a| + 1$$

이다. 이제

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_k|, |a| + 1$$

로 놓으면 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_n| \le M$$

이므로 수열 $< x_n >$ 은 유계이다.

12. 정 리. $x_n \to a,\ x_n \to b$이면 $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$ 이다.

증 명1 $< x_n >$ 이 수렴하므로 유계이다. 따라서 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_n| < l$$

인 양수 l 이 존재한다.

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b + ab| \le |x_n|\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a| \le l\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a|$$

이므로 보조정리 4에 의해 $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$ 이다.

증 명2 $< x_n >$ 이 수렴하므로 유계이다. 따라서 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_n| < l$$

인 양수 l 이 존재한다. 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $n > k$ 이면

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{l + |b|},\ |y_n - b| < \frac{\epsilon}{l + |b|}$$

인 자연수 k 가 존재한다. 따라서 $n > k$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b + ab| \le |x_n|\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a| < \frac{l\epsilon}{l + |b|} + \frac{|b|\epsilon}{l + |b|} = \epsilon$$

이므로 $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$ 이다.

13. 보 기. (1) $x_n \to a$ 이면 자연수 k 에 대해 $x_n^k \to a^k$ 이다.

(2) 다항식 $p(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i$ 에 대해 $x_n \to a$ 이면 $p(x_n) \to p(a)$ 이다.

14. 보조정리. $x_n \neq 0,\ x_n \to 1$이면 $\frac{1}{x_n} \to 1$ 이다.

증 명 $\epsilon = \frac{1}{2}$ 로 잡자. $x_n \to 1$ 이므로 $n > k$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_n - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x_n < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{x_n} < 1$$

인 자연수 k 가 존재한다. 따라서 $n > k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$\left| \frac{1}{x_n} - 1 \right| = \left| \frac{x_n - 1}{x_n} \right| \le 2|x_n - 1|$$

이므로 보조정리 4에 의해 $\frac{1}{x_n} \to 1$ 이다.

15. 정 리. $x_n \to a,\ y_n \to b$이고, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $by_n \neq 0$이면 $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ 이다.

증 명 $\frac{y_n}{b} \to 1$ 이므로 보정정리 14에 의해 $\frac{b}{y_n} \to 1$ 이다.

그런데 $\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n}{b} \cdot \frac{b}{y_n}$ 이므로 정 리 12에 의해 $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ 이다.

16. 보 기. $x_n \to a$ 이다. 다항식 $p(t)=\sum_{i=0}^{k} a_i t^i$ 와 $q(a)\neq 0,\ q(x_n)\neq 0$인 다항식 $q(t)=\sum_{i=0}^{l} a_i t^i$ 에 대해 $\dfrac{p(x_n)}{q(x_n)} \to \dfrac{p(a)}{q(a)}$ 이다.

17. 정 리. 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n \geq 0$ 이고 $< x_n > \to a$ 이면 $a \geq 0$ 이다.

증 명 $a < 0$ 이면 모순임을 보인다. $\epsilon = -a > 0$ 에 대해 $n > k$ 인 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해

$$|x_n - a| < \epsilon = -a \iff 2a < x_n < 0$$

인 자연수 k 가 존재한다. 이것은 $x_n \geq 0$ 에 모순이다. 따라서 $a \geq 0$ 이다.

18. 정 리. 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n \leq y_n$ 이고 $< x_n >$, $< y_n >$이 수렴하면

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

증 명 $z_n = y_n - x_n$ 로 놓으면 $z_n \geq 0$ 이고 정 리 5에 의해

$$z_n \to \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n$$

이다. 또 정 리 17에 의해 $\lim_{n\to\infty} z_n \geq 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$ 이다.

19. 정 리. 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $a \leq x_n \leq b$ 이고 수열 $< x_n >$ 이 수렴하면

$$a \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq b$$

증 명 $< a > \to a$, $< b > \to b$이므로 정 리 18에 의해 $a \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq b$ 이다.

20. 정 리. 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n > 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 이다.

증 명 정 리 17에 의해 $L \geq 0$ 이다. 또 $L < 1$ 이므로

$$L < l < 1$$

인 양수 l 이 존재한다. $\epsilon = l - L > 0$ 에 대해 $n \geq k$ 인 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \epsilon = l - L \iff 2L - l < \frac{x_{n+1}}{x_n} < l$$

인 자연수 k 가 존재한다. 따라서 $n \geq k$ 인 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해

$$0 < x_{n+1} < l\, x_n < l^2 x_{n-1} < \cdots < l^{n-k+1} x_k$$

이고 $l^n \to 0$ 이므로 $x_n \to 0$ 이다.

21. 정 리. 수열$< x_n >$ 와 실수 a에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x_n \nrightarrow a$

(2) $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin (a-\epsilon, a+\epsilon)$이 무한집합이 되는 $\epsilon > 0$ 이 존재한다.

(3) 다음을 만족시키는 $\epsilon > 0$ 이 존재한다.

'임의의 자연수 k에 대해 $n_k \geq k$ 이고 $|x_{n_k} - a| \geq \epsilon$ 인 자연수 n_k가 존재한다.'

증 명 정 리 3에 의해 (1) $\Leftrightarrow$ (2)이고, (2) $\Leftrightarrow$ (3)은 자명하다.

22. 정 리. 수열 $< x_n >$ 에서 두 집합

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq a\},\ \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq b\}$$

가 모두 무한집합이 되는 두 실수 a와 $b(a < b)$가 존재하면 $< x_n >$ 은 발산한다.

증 명 $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ 로 놓자. 각 $c \in \mathbb{R}$에 대해

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin (c-\epsilon, c+\epsilon)$$

이 무한집합이므로 $x_n \nrightarrow c$ 이다. 따라서 $< x_n >$ 은 발산한다.

23. 보 기. 수열 $< (-1)^n >$ 에서 두 집합

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq 0\},\ \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq 1\}$$

가 모두 무한집합이므로 $< x_n >$ 은 발산한다.

24. 보 기. 수열 $< \sin n >$ 은 발산함을 다음과 같이 보일 수 있다.

$$I_k = \left(2(k-1)\pi + \frac{\pi}{6},\ 2(k-1)\pi + \frac{5\pi}{6}\right),\ J_k = \left(2(k-1)\pi + \frac{7\pi}{6},\ 2(k-1)\pi + \frac{11\pi}{6}\right)$$

로 놓으면

$$l(I_k) = l(J_k) = \frac{2\pi}{3} > 2$$

이므로 I_k, J_k는 각각 적어도 2 개의 자연수를 포함하고,

$$x \in I_k \text{ 이면 } \sin x \geq \frac{1}{2},\quad x \in J_k \text{ 이면 } \sin x \leq -\frac{1}{2}$$

이다. 따라서

$$\left\{n \in \mathbb{N} \mid \sin n \leq -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq \frac{1}{2}\right\}$$

가 모두 무한집합이므로 $< \sin n >$ 은 발산한다.

핵심내용

1. 수열과 급수의 수렴의 정의

$x_n \to a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \not\to a$, $x_n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a$

2. $x_n \to a$, $y_n \to b$, $\alpha \in \mathbb{R}$이면 $\alpha x_n + y_n \to \alpha a + b$, $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$, $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b} (y_n b \neq 0)$이다.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = t$이고 a가 상수이면 $\sum_{n=1}^{\infty} (ax_n + y_n) = as + t$이다.

4. 압축정리. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 인 수열 $< x_n >$, $< y_n >$, $< z_n >$에서 $x_n \to a$, $z_n \to a$이면 $y_n \to a$ 이다.

5. $a > 0$에 대해 $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ 이다.

6. 수렴하는 수열은 유계이고, 그 극한이 유일하다.

7. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x_n \geq 0$ 이고 $< x_n > \to a$ 이면 $a \geq 0$ 이다.

8. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x_n \leq y_n$ 이고 $< x_n >$, $< y_n >$이 수렴하면

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

9. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $a \leq x_n \leq b$ 이고 수열 $< x_n >$ 이 수렴하면

$$a \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq b$$

10. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x_n > 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 이다.

11. 수열 $< \sin n >$ 은 발산한다.

연습문제

1. 정의에 의해 다음 수열 $< x_n >$ 이 수렴함을 보여라.

(1) $x_n = \frac{1}{n^2}$ (2) $x_n = \frac{2n}{n+1}$

(3) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (4) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$

2. $x_n \to 1$ 일 때, $n \geq k$ 이면 $0 \leq x_n \leq 2$ 인 자연수 k 가 존재함을 보여라.

3. 실수 a 와 자연수 n 에 대해 $|1+a|^n \geq 1+na$임을 보여라.

4. 다음 수열 $< x_n >$ 의 수렴, 발산을 조사하라.

(1) $x_n = \frac{n^2}{n!}$ (2) $x_n = \frac{2^n}{n!}$

(3) $x_n = \sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$ (4) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$

(5) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ☆(6) $x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$

5. $x_n \to a$ 이면 $|x_n| \to |a|$임을 보여라.

6. $x_n \geq 0$ 이고 $x_n \to a$이면 유리수 $\alpha > 0$에 대해 $x_n^{\alpha} \to a^{\alpha}$임을 보여라.

7. $0 < a_n < 100$, $\alpha > 0$에 대해 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{(a_1+\alpha)\cdot(a_2+\alpha)\cdots(a_n+\alpha)} = 0$임을 보여라.

8. 수열 $< \cos n >$ 은 발산함을 보여라.

9. 수열 $< x_n >$ 이 유계일 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $y_n \to 0$ 이면 $< x_n y_n >$ 이 수렴함을 보여라.

(2) $y_n \to 1$ 이지만 $< x_n y_n >$ 은 수렴하지 않는 수열 $< x_n >$, $< y_n >$을 구하라.

10. $x_n \to a$, $y_n \to b$ 이면 $\max\{x_n, y_n\} \to \max\{a, b\}$, $\min\{x_n, y_n\} \to \min\{a, b\}$ 임을 보여라.

11. $0 < a < b$ 이다. $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하라.

(1) $a_n = \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$

(2) $a_n = (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$

(3) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$

(4) $a_n = (3\sqrt{n})^{\frac{1}{2n}}$

(5) $a_n = (n!)^{\frac{1}{n}}$

(6) $a_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}$

(7) $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n}+1$, $x_1 = 2$ 이고 $a_n = |x_n|^{\frac{1}{n}}$

(8) $x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{1}{x_n^2}$, $x_1 = 1$이고 $a_n = |x_n|^{\frac{1}{n}}$

(9) $x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{27}{x_n^2}$, $x_1 = 1$이고 $a_n = |x_n|^{\frac{1}{n}}$

☆12. 모든 자연수 n 에 대해 $a_n > 0$ 이다.

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}}$이 존재하지만 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$은 존재하지 않는 수열 $< a_n >$을 하나 구하라.

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = a$임을 보여라.

담쟁이

도종환

저것은 벽

어쩔 수 없는 벽이라고 우리가 느낄 때

그때

담쟁이는 말없이 그 벽을 오른다

물 한방울 없고 씨앗 한톨 살아남을 수 없는

저것은 절망의 벽이라고 말할 때

담쟁이는 서두르지 않고 앞으로 나아간다

한 뼘이라도 꼭 여럿이 함께 손을 잡고 올라간다

푸르게 절망을 다 덮을 때가지

바로 그 절망을 잡고 놓지 않는다

저것은 넘을 수 없는 벽이라고 고개를 떨구고 있을 때

담쟁이잎 하나는 담쟁이잎 수천 개를 이끌고

결국 그 벽을 넘는다.

5. 단조수열

이 절에서는 유계인 단조수열은 수렴함을 보인다.

바탕내용

바탕 1. $\sup S,\ \inf S$

바탕 2. $0 \le a_k \le 1$에 대해 다음이 성립한다.
(1) $1-(a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n) \le (1-a_1)(1-a_2)\ \cdots\ (1-a_n)$
(2) $1+(a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n) \le (1+a_1)(1+a_2)\ \cdots\ (1+a_n)$

1. 정 의. 수열 $< x_n >$ 에 대해 다음과 같이 정의한다.
(1) 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$x_n \le x_{n+1}$$

이면 $< x_n >$ 을 증가수열 (increasing sequence)이라 하고

$$x_n \uparrow$$

로 나타낸다. 또 증가수열$< x_n >$ 이 a 로 수렴하면

$$x_n \uparrow a$$

로 나타낸다.
(2) 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$x_n < x_{n+1}$$

이면 $< x_n >$ 을 순증가수열(strictly increasing sequence)이라고 한다.
(3) 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$x_n \ge x_{n+1}$$

이면 $< x_n >$ 을 감소수열 (decreasing sequence)이라 하고

$$x_n \downarrow$$

로 나타낸다. 또 감소수열$< x_n >$ 이 a 로 수렴하면

$$x_n \downarrow a$$

로 나타낸다.
(4) 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$x_n > x_{n+1}$$

이면 $< x_n >$ 을 순감소수열(strictly decreasing sequence)이라고 한다.
(5) 증가수열이나 감소수열을 단조수열(monotone sequence)이라고 한다.

2. 정 리. $< x_n >$ 이 유계인 증가수열이면 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n$ 이다.

증 명 $< x_n >$ 이 유계이므로 완비성공리에 의해

$$\alpha = \sup\{x_n$$

이 존재한다. 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $\alpha - \epsilon$ 은 $\{x_n\}$ 의 상계가 아니므로

$$\alpha - \epsilon < \ x_k \ \leq \alpha$$

인 자연수 k가 존재한다.
그런데 $< x_n >$이 증가수열이므로 $n > k$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$\alpha - \epsilon \ < \ x_k \ \leq x_n \ \leq \alpha, \text{ 즉 } \left| x_n - \alpha \right| \ < \ \epsilon$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ 이다.

마찬가지로 $< x_n >$ 이 유계인 감소수열이면 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n$ 이다.

3. 보 기. (1) $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ 은 감소수열이므로 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$이다.
(2) $0 < a < 1$ 이면 $< a^n >$ 은 감소수열이고 $a^n > 0$ 이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \inf a^n = \alpha \geq 0$$

이고

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \lim_{n\to\infty} a^n = a\alpha$$

이다. 즉 $\alpha = a\alpha$ 이고 $a \neq 1$ 이므로 $\alpha = 0$ 이다.
(3) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \left(x_n^2 + 4x_n - 4\right)^{\frac{1}{3}}$ 로 정의된 수열 $< x_n >$ 은 2로 수렴한다.

풀 이 $1 < x_1 < 2$이다. $1 < x_k < 2$라면

$$1 = (1+2)^2 - 8 < x_{k+1}^3 = x_k^2 + 4x_k - 4 = (x_k + 2)^2 - 8 < (2+2)^2 - 8 = 8$$

즉, $1 < x_{k+1} < 2$이므로 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \in N$ 에 대해

$$1 < x_n < 2$$

이다. 따라서

$$x_{n+1}^3 - x_n^3 = -x_n^3 + x_n^2 + 4x_n - 4 = (x_n - 1)(x_n + 2)(2 - x_n) \ > 0$$

즉, $< x_n >$ 은 증가수열이므로 $< x_n >$은

$$\alpha = \sup\{x_n$$

로 수렴하고 $\alpha > 1$ 이다. 또

$$\alpha^3 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^3 = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 4x_n - 4) = \alpha^2 + 4\alpha - 4$$

이므로

$$\alpha^3 - \alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha + 2)(\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0$$

이다. 그런데 $\alpha > 1$ 이므로 $\alpha = 2$ 이다.

4. 보 기. $x_{n+1}=2+\left(x_n^2-8\right)^{\frac{1}{3}}$인 수열 $<x_n>$ 의 수렴여부를 조사하라.

풀 이 다음이 성립한다.

[1] 수열 $<x_n>$ 이 α 로 수렴하면 α 는

$$\alpha=2+\sqrt[3]{\alpha^2-8}$$

를 만족시킨다. 따라서

$$(\alpha-2)^3=\alpha^2-8 \text{ 즉, } \alpha(\alpha-3)(\alpha-4)=0$$

이므로 α 는 $0,\ 3,\ 4$ 중 하나이다.

[2] $n\geq 2$에 대해 $x_1=0$이면 $x_n=0,\ |x_1|=3$이면 $x_n=3,\ |x_1|=4$이면 $x_n=4$이다.

[3] $x_{n+1}=2+\left(x_n^2-8\right)^{\frac{1}{3}}$에서 수학적 귀납법에 의해 $n\geq 2$인 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해

$$|x_1|>4\text{이면 } x_n>4$$
$$3<|x_1|<4\text{이면 } 3<x_n<4$$
$$0<|x_1|<3\text{이면 } 0<x_n<3$$

[4] $(x_{n+1}-2)^3=x_n^2-8$에서 $(x_n-2)^3-(x_{n+1}-2)^3=x_n(x_n-3)(x_n-4)$이므로

$$x_n>4\text{이면 } x_n>x_{n+1}$$
$$3<x_n<4\text{이면 } x_n<x_{n+1}$$
$$0<x_n<3\text{이면 } x_n>x_{n+1}$$

[5] $n\geq 2$에 대해 [3]과 [4]에 의해

$$|x_1|>4\text{이면 } 4<x_{n+1}<x_n$$
$$3<|x_1|<4\text{이면 } 3<x_n<x_{n+1}<4$$
$$0<|x_1|<3\text{이면 } 0<x_{n+1}<x_n<3$$

[6] $|x_1|<3$이면 $x_n\to 0,\ |x_1|=3$이면 $x_n\to 3,\ 3<|x_1|$이면 $x_n\to 4$이다.

5. 보 기. $x_{n+1}=\left(x_n^2+4x_n-4\right)^{\frac{1}{3}}$인 수열 $<x_n>$ 의 수렴여부를 조사하라.

풀 이 $y_n=x_n+2$ 로 놓으면 $y_{n+1}=2+\sqrt[3]{y_n^2-8}$ 이므로 보 기4에 의해

$$-5<x_1<1 \text{ 이면 } x_n\to -2,$$
$$x=-5 \text{ 또는 } x=1 \text{ 이면 } x_n\to 1,$$
$$x<-5 \text{ 또는 } x>1 \text{ 이면 } x_n\to 2$$

6. 정 리. 자연수 m과 $0<x\le m$인 실수 x에 대해

$$x_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ y_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+m}$$

라 하면 $x_n<x_{n+1},\ y_n>y_{n+1}$이다.

증 명 $a=1+\frac{x}{n+1},\ b=1+\frac{x}{n}$로 놓자.

$$b^{n+1}-a^{n+1}=(b-a)\sum_{k=0}^{n}b^ka^{n-k}<(n+1)(b-a)b^n=x\frac{b^n}{n},\quad b^n\left(b-\frac{x}{n}\right)=b^n<a^{n+1}$$

이므로 $x_n<x_{n+1}$이다.

$t=\frac{x}{n+1+x},\ A=\frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}=1+\frac{t}{n}$라 하면 바탕 2에 의해 $A^{n+m}\ge 1+t+\frac{mt}{n}$이므로

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=A^{n+m}(1-t)\ge\left(1+t+\frac{mt}{n}\right)\cdot(1-t)=1+\frac{t^2}{nx}\left(\frac{mx}{t}-mx-nx\right)$$

이고

$$\frac{mx}{t}-mx-nx=m(n+1+x)-mx-nx=n(m-x)+m\ge m$$

이므로 $y_n>y_{n+1}$이다.

7. 정 리. 두 자연수 m과 n에 대해 $\left(1+\frac{m}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn}<\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n+m}$이다.

증 명 $1+\frac{m}{n}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$이므로 $\left(1+\frac{m}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn}$이다.

이제 $p(m)$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn}<\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n+m}$이라고 하자.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$이므로 $p(1)$은 참이다.

$p(k)$가 참이라고 하자. 즉, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}<\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k}$라고 하자.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$이므로 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+m}\right)^{n+m}$이고, $p(k)$가 참이므로

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(k+1)}&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}\\&<\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k}\\&=\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^{n+k}\\&<\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^{n+k+1}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $p(k+1)$도 참이므로 수학적 귀납법에 의해 $p(m)$은 모두 참이다.

핵심내용

1. 증가수열, 순증가수열, 감소수열, 순감소수열, 단조수열, $x_n \downarrow$, $x_n \downarrow a$, $x_n \uparrow$, $x_n \uparrow a$

2. $< x_n >$ 이 유계인 증가수열이면 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n$이다.

3. $x_{n+1} = 2 + \left(x_n^2 - 8\right)^{\frac{1}{3}}$인 수열 $< x_n >$ 의 수렴여부 판정하기.

4. 자연수 m과 $0 < x \le m$인 실수 x에 대해

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+m}$$

라 하면 $x_n < x_{n+1},\ y_n > y_{n+1}$이다.

5. 두 자연수 m과 n에 대해 $\left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{mn} < \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n+m}$이다.

연습문제

1. 다음 수열 $< x_n >$은 단조수열인가? 단조수열이면 그 극한을 구하라.

(1) $x_n = \sqrt{n^2+2n} - n$ (2) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ (3) $x_1 = 9,\ x_{n+1} = \sqrt{14+\sqrt{x_n}}$

2. 다음 수열 $< x_n >$ 의 수렴여부를 조사하라.

(1) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 14}{15}$ (2) $x_{n+1} = 2\sqrt{x_n} + 8$ (3) $x_1 > 1,\ x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n^2}$

3. 다음 수열 $< x_n >$의 수렴여부를 조사하라.

(1) $x_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{n}$ ☆(2) $x_n = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{3n-1}{3n} \cdot \sqrt{n}$

4. $n \in \mathbb{N}$에 대해 $\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^n < \dfrac{n+2}{n+1} < \left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$ 임을 보여라.

5. a_k가 다음과 같을 때, $b_n = a_1 a_2, \cdots a_n$이면 $b_n \to 0$인가?

(1) $a_k = \dfrac{k^2}{k^2+k}$ (2) $a_k = \dfrac{k^2+2k}{(k+1)^2}$ (3) $a_k = \dfrac{k^2}{k^2+1}$

6. $n \in \mathbb{N}$에 대해 다음 부등식이 성립함을 보여라.

(1) $\left(\dfrac{1}{n+3}\right)^{\frac{1}{n+3}} < 1 - \dfrac{1}{n+3}$ (2) $\dfrac{1}{n} \le \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

7. 다음 극한을 구하라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^{\frac{1}{n}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}}$

8. $n \in \mathbb{N}$, 양의 유리수 r에 대해 $\left(1+\dfrac{r}{n+1}\right)^{n+1+r} < \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{n+r}$ 임을 보여라.

9. $n\in\mathbb{N}$에 대해 다음이 성립함을 보여라.

(1) $x>0$이면 $1+(2n+1)x+(2n^2+n)x^2+n^3x^3 \le (1+x)^{2n+1}$이다.

(2) $1+\dfrac{2n+1}{n^2+2n}+\dfrac{2n+1}{n(n+2)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^3}\le\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{2n+1}$

(3) $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^2<1+\dfrac{2n+1}{n^2+2n}+\dfrac{2n+1}{n(n+2)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^3}$

(4) $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n+3}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$

10. $n\in\mathbb{N}$에 대해 다음 부등식이 성립함을 보여라.

(1) $\dfrac{(n+1)^4}{n^3(n+2)}<\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{2n+4}$

(2) $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n+3}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$

11. $n\in\mathbb{N}$과 $0\le x\le 1$에 대해 다음 부등식이 성립함을 보여라.

(1) $(1-x)^n \ge 1-nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$

(2) $n\ge 3$이면 $\dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}<\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^{3n+3}$이다.

(3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n+1}<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{3n+4}$

12. (1) $0<a<1$, $a\in\mathbb{Q}$, $h>0$이면 $(1+h)^a<1+ah$임을 보여라.

(2) $a>1$, $a\in\mathbb{Q}$, $h>0$이면 $(1+h)^a>1+ah$임을 보여라.

☆13. $0<\alpha<1$ 이다. 이때 $0<a_n<1$, $a_1a_2\cdots a_n \to \alpha$인 수열 $<a_n>$이 존재함을 보여라.

☆14. $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n>0$이 방정식 $x^{n+2}+x^{n+1}+x-1=0$의 근이면 $x_n\uparrow 1$임을 보여라.

산술기하평균부등식탐구

1. 산술기하평균부등식1. $n\in\mathbb{N}$과 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대해

$$n a_1 a_2 \cdots a_n \le a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n$$

이고 등호는 $a_1 = a_2 = \cdot \cdots \cdot = a_n$일 때만 성립한다.

증 명. $t^{n+1} - (n+1)t + n = (t-1)^2(t^{n-1} + 2t^{n-2} + \cdot \cdots \cdot + n)$이고, 두 양수 a와 b에 대해

$$b^{n+1} - (n+1)a^n b + n a^{n+1} = a^{n+1}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - (n+1)\cdot\frac{b}{a} + n\right\}$$

이므로

$$(n+1)a^n b \le n a^{n+1} + b^{n+1} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이고 등호는 $a = b$일 때만 성립한다.

이제 자연수 n과 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대해

$$n a_1 a_2 \cdots a_n \le a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n$$

임을 수학적 귀납법으로 보이자.

[1] $n = 1$일 때, 성립한다.

[2] $n = k$일 때, 성립한다고 가정하면 $k a_1 a_2 \cdots a_k \le a_1^k + a_2^k + \cdots + a_k^k$이다.

[3] $n = k+1$일 때, ①에 의해 $1 \le m \le k$에 대해

$$(k+1)a_m^k a_{k+1} \le k a_m^{k+1} + a_{k+1}^{k+1}$$

이므로

$$(k+1)a_{k+1}\sum_{m=1}^{k} a_m^k = \sum_{m=1}^{k}(k+1)a_m^k a_{k+1} \le \sum_{m=1}^{k} k a_m^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} a_{k+1}^{k+1} = k\sum_{m=1}^{k+1} a_m^{k+1}$$

이고 귀납적 가정에 의해

$$k a_1 a_2 \cdots a_k \le a_1^k + a_2^k + \cdots + a_k^k = \sum_{m=1}^{k} a_m^k$$

이므로

$$k(k+1)a_{k+1} a_1 a_2 \cdots a_k \le (k+1)a_{k+1}\sum_{m=1}^{k} a_m^k$$

이다. 따라서 $k(k+1)a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \le k\sum_{m=1}^{k+1} a_m^{k+1}$이므로

$$(k+1)a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \le \sum_{m=1}^{k+1} a_m^{k+1}$$

따라서 산술기하평균부등식이 성립한다.

2. 산술기하평균부등식2. $n\in\mathbb{N}$과 양수 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$에 대해

$$a_1\,a_2\,\cdot\,\cdots\,\cdot a_n\le\left(\frac{a_1+a_2+\,\cdot\,\cdots\,\cdot+a_n}{n}\right)^n$$

이고 등호는 $a_1=a_2=\,\cdot\,\cdots\,\cdot=a_n$일 때만 성립한다.

증 명. 두 양수 a와 b에 대해 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$이므로 $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 등호는 $a=b$일 때만 성립한다. 따라서 네 양수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대해

$$abcd\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{c+d}{2}\right)^2,\ (a+b)(c+d)\le\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2$$

이므로 $abcd\le\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$이고 등호는 $a=b=c=d$일 때만 성립한다.

그러므로 수학적 귀납법으로

$$a_1\,a_2\,\cdot\,\cdots\,\cdot a_{2^n}\le\left(\frac{a_1+a_2+\,\cdot\,\cdots\,\cdot+a_{2^n}}{2^n}\right)^{2^n}$$

이고 등호는 $a_1=a_2=\,\cdots\,=a_{2^n}$일 때만 성립함을 보일 수 있다.

$2^n\le k<2^{n+1}$인 자연수 k에 대해

$$\alpha=\frac{a_1+a_2+\,\cdots\,+a_k}{k},\ \beta=\left(a_1\,a_2\,\cdots\,a_k\right)^{\frac{1}{k}},\ a_{k+1}=a_{k+2}=\,\cdot\,\cdots\,\cdot=a_{2^{n+1}}=\alpha$$

라고 하면

$$a_1\,a_2\,\cdots\,a_{2^{n+1}}=a_1\,a_2\,\cdots a_k\cdot a_{k+1}\cdots\,a_{2^{n+1}}=\beta^k\cdot\alpha^{2^{n+1}-k},$$

$$a_1+a_2+\,\cdots\,+a_{2^{n+1}}=\left(a_1+a_2+\,\cdots\,+a_k\right)+\left(a_{k+1}+\,\cdots\,a_{2^{n+1}}\right)=k\alpha+\left(2^{n+1}-k\right)\alpha=2^{n+1}\alpha$$

이므로

$$\beta^k\cdot\alpha^{2^{n+1}-k}\le\alpha^{2^{n+1}}$$

이다. 따라서 $\beta^k\le\alpha^k$이고 등호는 $a_1=a_2=\,\cdot\,\cdots\,\cdot=a_k$일 때만 성립한다.

3. $a>0$, 자연수 $p,\ q$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n<\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$ (2) $\left(1+\frac{q}{(n+1)p+q}\right)^{(n+1)+q}<\left(1+\frac{q}{np}\right)^{np+q}$

증 명 (1) 산술기하평균부등식2에 $a_1=1,\ a_2=a_3=\,\cdot\,\cdots\,\cdot=a_{n+1}=1+\frac{a}{n}$를 대입한다.

(2) $a_1=a_2=\cdots=a_p=1,\ a_{p+1}=a_{p+2}=\,\cdot\,\cdots\,\cdot=a_{np+p+q}=\frac{np}{np+q}$라 하면

$\sum_{k=1}^{np+p+q}a_k=\sum_{k=1}^{p}a_k+\sum_{k=p+1}^{np+p+q}a_k=p+np=(n+1)p$이므로 $a_1\cdot a_2\,\cdots\,a_{np+p+q}=\left(\frac{np}{np+q}\right)^{np+q}$이고

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{np+p+q}$의 산술평균은 $\frac{(n+1)p}{(n+1)p+q}$이다. 따라서 산술기하평균부등식2에 의해

$\left(\frac{np}{np+q}\right)^{np+q}<\left(\frac{(n+1)p}{(n+1)p+q}\right)^{(n+1)p+q}$이므로 $\left(1+\frac{q}{(n+1)p+q}\right)^{(n+1)+q}<\left(1+\frac{q}{np}\right)^{np+q}$이다.

영원한 것은 없다

법정 스님

이 세상에서 영원한 것은 아무것도 없다.
어떤 어려운 일도
어떤 즐거운 일도 영원하지 않다.

모두 한때이다.
한 생애를 통해 어려움만 지속된다면
누가 감내하겠는가.
다 도중에 하차하고 말 것이다.

좋은 일도 그렇다.
좋은 일도 늘 지속되지는 않는다.
그러면 사람이 오만해진다,
어려운 때일수록 낙천적인 인생관을 가져야 한다,
덜 갖고도 더 많이 존재할 수 있어야 한다.

이전에는 무심히 관심 갖지 않던 인간관계도
더욱 살뜰히 챙겨야 한다.
더 검소하고 작은 것으로써 기쁨을 느껴야 한다.

삶에서 참으로 소중한 것은

어떤 사회적인 지위나 신분, 소유물이 아니다.
우리들 자신이 누구인지 아는 일이다.

그 어느 때보다
힘든 시기를 당했을 때
'도대체 나는 누구지?'하고
자기 존재를 확인해야 한다.

자신이 지니고 있는 직위나 돈, 재능이 중요한 것이 아니라,
어떤 일을 하며 어떻게 살고 있는가에 따라
삶의 가치가 결정된다.

6. 부분수열

이 절에서는 부분수열을 정의하고 성질을 알아본다.

바탕내용

바탕 1. 압축정리. 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n \le y_n \le z_n$인 수열 $< x_n >$, $< y_n >$, $< z_n >$에서 $x_n \to a$, $z_n \to a$이면 $y_n \to a$이다.

바탕 2. $< x_n >$이 유계인 단조수열이면 수렴한다.

바탕 3. Archimedes성질. 두 실수 a와 $b(b>0)$에 대해 $a < nb$ 인 $n\in\mathbb{N}$이 존재하고, $\frac{1}{n} < b$ 인 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.

바탕 4. 수열의 수렴과 극한. 유계수열

바탕 5. 수열$< x_n >$ 와 실수a 에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x_n \nrightarrow a$

(2) $\{n\in\mathbb{N} \mid x_n \notin (a-\epsilon, a+\epsilon)\}$ 이 무한집합이 되는 $\epsilon > 0$ 이 존재한다.

(3) 다음을 만족시키는 $\epsilon > 0$ 이 존재한다.
'임의의 자연수 k에 대해 $n_k \ge k$ 이고 $|x_{n_k} - a| \ge \epsilon$ 인 자연수 n_k가 존재한다.'

1. 정 의. 수열 $< x_n >$, 자연수를 값으로 가지는 순증가수열 $< n_k >$ 에 대해 $y_k = x_{n_k}$ 인 수열 $< y_k >=< x_{n_k} >$를 $< x_n >$ 의 부분수열(subsequence)이라고 한다.

2. 보 기. (1) $x_n = \frac{1}{n}$ 인 수열 $< x_n >$ 에서 $n_k = 2k$, $m_k = 2k-1$이면 $< x_{n_k} >= \left\langle \frac{1}{2k} \right\rangle$, $< x_{m_k} >= \left\langle \frac{1}{2k-1} \right\rangle$이다. 따라서 $\left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle$과 $\left\langle \frac{1}{2n-1} \right\rangle$은 $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$의 부분수열이다.

(2) $< (-1)^n >$ 에서 $n_k = 2k$ 이면 $< y_k >=< 1 >$, $n_k = 2k-1$ 이면 $< y_k >=<-1>$ 이다. 따라서 $<1>$ 과 $<-1>$ 은 $< (-1)^n >$ 의 부분수열이다.

(3) $a \ge 1$ 이고 $x_n = a^{\frac{2}{n}}$일 때, 수열 $< x_{2n} >= \left\langle a^{\frac{1}{n}} \right\rangle$ 은 $< x_n >$ 의 부분수열이다.

3. 정 리. 수열 $< x_n >$ 와 실수 a 에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x_n \to a$

(2) $< x_{n_k} >$가 $< x_n >$ 의 부분수열이면 $x_{n_k} \to a$이다.

(3) 다음을 만족시키는 $< x_n >$의 두 부분수열 $< x_{n_k} >$, $< x_{m_k} >$이 존재한다.

$$x_{n_k} \to a,\ x_{m_k} \to a,\ \mathbb{N} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$$

(4) 다음을 만족시키는 $< x_n >$의 세 부분수열 $< x_{n_k} >$, $< x_{m_k} >$, $< x_{l_k} >$가 존재한다.

$$x_{n_k} \to a,\ x_{m_k} \to a,\ x_{l_k} \to a,\ \mathbb{N} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{m_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{l_k\}_{k=1}^{\infty}$$

증 명 (1) $\Rightarrow$ (2) $x_n \to a$이므로 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $n > l$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_n - a | < \epsilon$$

인 자연수 l이 존재한다. 또 $n_k \geq k$ 이므로 $k > l$ 이면 $n_k > l$ 이다.

따라서 $k > l$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_{n_k} - a | < \epsilon$$

이므로 $x_{n_k} \to a$이다.

(2) $\Rightarrow$ (3) $n_k = 2k-1,\ m_k = 2k$ 또는 $n_k = m_k = k$로 택하면 된다.

(3) $\Rightarrow$ (4) $l_k = n_k$로 택하면 된다.

(4) $\Rightarrow$ (1) $x_{n_k} \to a,\ x_{m_k} \to a,\ x_{l_k} \to a$이므로 주어진 $\epsilon > 0$에 대해 $k > p$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon,\ |x_{m_k} - a| < \epsilon,\ |x_{l_k} - a| < \epsilon$$

인 자연수 p가 존재한다. 이제 $n > \max\{n_l, m_p, l_p\}$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$n = n_q \text{ 또는 } n = m_q \text{ 또는 } n = l_q$$

이고 $q > p$인 $q \in \mathbb{N}$이 존재한다. 따라서 $n > \max\{n_l, m_p, l_p\}$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_n - a | < \epsilon$$

이므로 $< x_n >$도 a로 수렴한다.

4. 따름정리. (1) $x_{2n} \to a,\ x_{2n-1} \to a$이면 $x_n \to a$이다.

(2) $x_{3n} \to a,\ x_{3n-1} \to a,\ x_{3n-2} \to a$이면 $x_n \to a$이다.

(3) $a \neq b$ 일 때, 수열 $< x_n >$ 의 한 부분수열$< x_{n_k} >$이 a 로 수렴하고, 다른 부분수열 $< x_{m_k} >$이 b 로 수렴하면 수열 $< x_n >$ 은 발산한다.

5. 보 기. (1) 수열 $<(-1)^n>$에서 $n_k=2k$이면 $<x_{n_k}>=<1>$은 1에 수렴하고,
$n_k=2k-1$이면 $<x_{n_k}>=<-1>$은 -1에 수렴하므로 $<(-1)^n>$은 발산한다.

(2) 수열 $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$이 0 으로 수렴하므로 부분수열 $\left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle$, $\left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$도 0으로 수렴한다.

(3) $a \geq 1$이면 $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$이다.

풀 이 $a \geq 1$ 이므로 $<a^{\frac{1}{n}}>$ 은 $a_n \geq 1$ 인 감소수열이다. 따라서 $<a^{\frac{1}{n}}>$ 은
$\alpha = \inf\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$ 에 수렴하고 $\alpha \geq 1$ 이다. 또

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{2}{n}} \text{이므로 } \lim_{n\to\infty} a^{\frac{2}{n}} = \alpha^2$$

이다. 그런데 $<a^{\frac{1}{n}}>$ 은 $<a^{\frac{2}{n}}>$ 의 부분수열이므로

$$\alpha^2 = \alpha \text{ 즉, } \alpha(\alpha-1)=0$$

이고 $\alpha \geq 1$ 이므로 $\alpha = 1$ 이다.

6. 보 기. $x_1=1$, $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n^2}$ 인 수열 $<x_n>$ 은 수렴한다.

풀 이 다음이 성립한다.

[1] 수학적 귀납법에 의해 $1 \leq x_n \leq 3$이다.

[2] $x_2=3$, $x_3=2+\frac{1}{9}$, $x_4=2+\frac{9^2}{19^2}$이므로 $x_3-x_1>0$, $x_4-x_2<0$이다.

[3] $x_{n+1}=\frac{2x_n^2+1}{x_n^2}$ 이므로 $x_{n+2}=2+\frac{1}{(x_{n+1})^2}=2+\frac{x_n^4}{(2x_n^2+1)^2}$이다.

[4] $x_{n+2}-x_n=\frac{x_n^4}{(2x_n^2+1)^2}-\frac{x_{n-2}^4}{(2x_{n-2}^2+1)^2}=\frac{(4x_n^2x_{n-2}^2+x_n^2+x_{n-2}^2)(x_n+x_{n-2})(x_n-x_{n-2})}{(2x_n^2+1)^2(2x_{n-2}^2+1)^2}$

[5] $x_{2n}\downarrow$, $x_{2n-1}\uparrow$ 이므로 $<x_{2n}>$, $<x_{2n-1}>$은 수렴한다.

$x_{2n-1}\to\alpha$, $x_{2n}\to\beta$라고 하면 $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n^2}$에서

$$\alpha=2+\frac{1}{\beta^2},\ \beta=2+\frac{1}{\alpha^2}$$

이다. 또 $2<\alpha,\beta<3$이므로

$$|\beta-\alpha|=\left|\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right|=\left|\frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\alpha^2\beta^2}\right|\leq\frac{(3+3)|\beta-\alpha|}{2^2 2^2}=\frac{3}{8}|\beta-\alpha|$$

이다. 따라서 $\alpha=\beta$이므로 따름정리 4(1)에 의해 $<x_n>$은 수렴한다.

7. 보 기. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}=0$이다.

풀 이 $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$라고 하면 $x_n>0,\ x_n\downarrow$이므로 수열 $<x_n>$은 수렴한다.

따라서 $y_n=x_{2n},\ \lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$라고 하면 $\lim_{n\to\infty}y_n=\alpha$이고 $\alpha\geq 0$이다. 또

$$y_n=x_n\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+4}\cdots\frac{4n-1}{4n}\leq\left(\frac{4n-1}{4n}\right)^n x_n$$

이다. $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$라 하면

$$a_n\downarrow,\ 2\leq a_n\leq a_1=4,\ \frac{1}{4}\leq\frac{1}{a_{4n-1}}=\left(\frac{4n-1}{4n}\right)^{4n}\leq\frac{1}{2}<0.9^4$$

이므로 $\alpha\leq 0.9\alpha$이다. 따라서 $\alpha=0$이다.

간결한 풀이 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n},\ b_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$이라 하면

$$0<a_n^2<a_nb_n=\frac{1}{2n+1},\ 0\leq a_n\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$$

이므로 압축정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

정 리 3과 바탕 5에 의해 다음이 성립한다.

8. 정 리. 수열 $<x_n>$ 와 실수 a에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x_n\nrightarrow a$

(2) $|x_{n_k}-a|\geq\epsilon$ 인 $<x_n>$의 부분수열 $<x_{n_k}>$와 양수 ϵ이 존재한다.

(3) $x_{n_k}\nrightarrow a$ 인 $<x_n>$ 의 부분수열 $<x_{n_k}>$가 존재한다.

9. 정 리. 모든 수열은 단조부분수열을 가진다.

증 명 수열 $<x_n>$ 이 주어졌다고 하고 집합 S를 다음과 같이 정의하자.

$$S=\{k\in\mathbb{N}\mid k\leq n\ \Rightarrow\ x_k\leq x_n\}$$

경우1 : S가 무한집합이다.

$n_k\in S$인 $<x_n>$ 의 부분수열$<x_{n_k}>$ 를 잡으면 $<x_{n_k}>$ 는 증가수열이다.

경우2 : S가 유한집합이다.

$S=\varnothing$ 이면 $n_1=1,\ S\neq\varnothing$ 이면 $n_1=1+\max S$로 놓자.

$n_1\notin S$이므로 $n_1<n_2,\ x_{n_2}<x_{n_1}$인 n_2가 존재한다.

또, $n_2\notin S$이므로 $n_2<n_3,\ x_{n_3}<x_{n_2}$ 인 n_3가 존재한다. 이 과정을 되풀이하여

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots$$

를 잡으면 $<x_n>$ 의 부분수열 $<x_{n_k}>$ 는 감소수열이다.

10. Bolzano-Weierstrass정리. 유계 수열은 수렴하는 부분수열을 가진다.

증 명1 수열 $< x_n >$ 이 유계라고 하자. 정 리 9에 의해 단조수열인 부분수열 $< x_{n_k} >$ 을 가진다. 그런데 $< x_n >$ 이 유계이므로 $< x_{n_k} >$ 도 유계이다. 따라 바탕 2에 의해 $< x_{n_k} >$ 은 수렴한다.

증 명2 유계수열 $< x_n >$ 에 대해 $S = \{x_n\}$ 라고 하자.

경우1 : S 가 유한집합

S 가 유한집합이므로 적어도 어느 한 수는 무한 번 나타난다. 이 수를 a 라고 하면

$$a = x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots \text{ 인 } n_1 < n_2 < \cdots$$

가 존재하고 $< x_{n_k} > \to a$ 이다.

경우2 : S 가 무한집합

S 가 유계이므로 $S \subset I_1 = [a_1, b_1]$ 인 구간 I_1 이 존재한다. $n_1 = 1$ 로 놓자.

$$F_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad G_1 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

라하고

$$A_1 = n \in N \mid n > n_1,\ x_n \in F_1,\ B_1 = n \in N \mid n > n_1,\ x_n \in G_1$$

라고 하자.

$$A_1 \text{ 이 무한집합이면 } I_2 = F_1 = [a_2, b_2]$$

로 놓고, A_1 의 최소원을 n_2 라 하자.

$$A_1 \text{ 이 유한집합이면 } I_2 = G_1 = [a_2, b_2]$$

로 놓고, B_1 의 최소원을 n_2 라 하자. 이때 $a_1 \le a_2 \le x_{n_2} \le b_2 \le b_1$이다.

$$F_2 = \left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right], \quad G_2 = \left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$$

라하고

$$A_2 = n \in N \mid n > n_2,\ x_n \in F_2,\ B_2 = n \in N \mid n > n_2,\ x_n \in G_2$$

라고 하자. 이때 $A_2 \cup B_2$ 가 무한집합이므로 A_2, B_2 중 적어도 하나는 무한집합이다.

$$A_2 \text{ 가 무한집합이면 } I_3 = F_2 = [a_3, b_3]$$

로 놓고, A_2 의 최소원을 n_3 라 하자.

$$A_2 \text{ 가 유한집합이면 } I_3 = G_2 = [a_3, b_3]$$

로 놓고, B_2 의 최소원을 n_3 라 하자. 이때 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le x_{n_3} \le b_3 \le b_2 \le b_1$, $x_{n_3} \in I_3$ 이다.

이 과정을 되풀이하여 I_k, n_k, a_k, b_k 을 잡으면

$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$, $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$, $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, $b_k - a_k = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$ 이다.

따라서 바탕 2에 의해 수열 $< a_n >$은 수렴한다. $a_n \to \alpha$라고 하면 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이므로 $b_n \to \alpha$이다. 또 $a_k \le x_{n_k} \le b_k$이므로 바탕 1에 의해 $x_{n_k} \to \alpha$ 이다.

11. 보 기. $0 \le m \le 2l$ 인 정수 m, 자연수 l에 대해

$$x_{l^2+m} = \frac{m}{l}$$

라고 하자. 이때 수열 $< x_n >$이 정의되고, 자연수 k에 대해

$$0 \le x_n \le 2,\ x_{(kl)^2+km} = \frac{m}{l}$$

이다 따라서 $n_k = l^2k^2 + km$라고 하면 $x_{n_k} = \frac{m}{l}$이므로 $x_{n_k} \to \frac{m}{l}$이다.
또 $0 \le \alpha \le 2$인 실수에 대해 $x_{n_k} \to \alpha$인 부분수열 $< x_{n_k} >$가 존재한다.

12. 정 리. 수열 $< x_n >$이 유계이다. $< x_n >$의 수렴하는 모든 부분 수열이 고정된 실수 a로 수렴하면 $< x_n >$ 도 a로 수렴한다.

증 명 $< x_n >$가 a 로 수렴하지 않으면 수렴하지만 그 극한값이 a가 아닌 $< x_n >$ 의 부분 수열이 존재함을 보이면 된다. $< x_n >$가 a 로 수렴하지 않으면 정 리 8에 의해

$$|x_{n_k} - a| \ge \epsilon$$

인 $< x_n >$의 부분수열 $< x_{n_k} >$와 양수 ϵ 이 존재한다. 이때 부분수열 $< x_{n_k} >$이 유계이므로 Bolzano-Weierstrass정리에 의해 $< x_{n_k} >$ 는 수렴하는 부분수열 $< y_n >$ 을 가진다.
그런데

$$|y_n - a| \ge \epsilon$$

이므로 $< y_n >$ 은 a로 수렴할 수 없다. $< y_n >$ 이 $< x_n >$의 수렴하는 부분수열이지만 $< y_n >$ 은 a로 수렴하지 않는다.
따라서 $< x_n >$ 도 a로 수렴한다.

핵심내용

1. 부분수열

2. $x_{2n} \to a$, $x_{2n-1} \to a$이면 $x_n \to a$이다.

3. 모든 수열은 단조부분수열을 가진다.

4. Bolzano-Weierstrass정리. 유계 수열은 수렴하는 부분수열을 가진다.

5. 유계 수열 $< x_n >$의 수렴하는 모든 부분 수열이 고정된 실수 a로 수렴하면 $< x_n >$ 도 a로 수렴한다.

연습문제

1. 수렴하는 부분수열을 갖지 않는 수열을 하나 구하라.

2. 유계가 아니지만 수렴하는 부분수열을 갖은 수열을 하나 구하라.

3. $x_n \geq 0$ 이다. $< (-1)^n x_n >$ 이 수렴하면 $< x_n >$도 수렴하는가?

4. 부분수열을 이용하여 $0 < a < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$임을 보여라.

5. 다음 수열 $< x_n >$ 은 수렴함을 보여라.

(1) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2x_n^2}$ (2) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n^2}$

6. 수열 $x_n \to a$와 자연수를 값으로 가지는 순증가수열 $< n_k >$에 대해 수열 $< y_n >$을 $n_{k-1} \leq m < n_k$이면 $y_m = x_k$로 정의하면 $y_n \to a$인가?

7. $n = 2^k + l,\ 0 \leq l < 2^k$일 때, $x_n = \frac{l}{2^k}$인 수열 $< x_n >$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) $\frac{1}{2}$ 로 수렴하는 부분수열이 존재하는가?

(2) 집합 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$을 구하라.

(3) 수열 $< x_n >$의 수렴하는 부분수열의 극한이 될 수 있는 수의 집합을 구하라.

8. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$이고 수열 $< x_n >$의 수렴하는 부분수열의 극한이 될 수 있는 수의 집합이 $\mathbb{N}$인 수열 $< x_n >$을 구하라.

9. $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{3n-1}{3n} = 0$임을 보여라.

☆10. 모든 자연수 n에 대해 x_n이 다음과 같을 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 값을 구하라.

(1) $x_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n+2}$

(2) $x_n = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdots \frac{2n}{2n+3}$

(3) $x_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} \cdots \frac{3n-2}{3n+3}$

(4) $x_n = \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{9} \cdots \frac{3n-1}{3n+3}$

(5) $x_n = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{10} \cdots \frac{3n-1}{3n+4}$

(6) $x_n = \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{10} \cdots \frac{3n}{3n+4}$

(7) $x_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{8} \cdots \frac{3n-2}{3n+2}$

(8) $x_n = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{11} \cdots \frac{3n}{3n+5}$

☆11. $a_n = n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right) \cdots \left(1-\frac{1}{2n^2}\right)$일 때, $a_n < a_{n+1}$ 임을 보여라.

☆12. 두 수열 $< x_n >$, $< a_n >$이 다음 조건을 만족시킨다.

각 자연수 k에 대해 a_k로 수렴하는 $< x_n >$의 부분수열이 존재한다.

이때 $a_n \to a$이면 a로 수렴하는 $< x_n >$의 부분수열이 존재함을 보여라.

☆13. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}^+$, $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$인 수열 $< x_n >$, $< y_n >$이 존재함을 보여라.

점화수열탐구

유형1. $x_{n+1}=ax_n+b(a\neq 1)$꼴은 $x_{n+1}-\alpha=a(x_n-\alpha)$꼴로 변형한다.

이때 $\alpha-a\alpha=b$, $\alpha=\dfrac{b}{1-a}$, $x_n-\alpha=a^{n-1}(x_1-\alpha)$이므로

$$x_n=\frac{b}{1-a}+a^{n-1}\left(x_1-\frac{b}{1-a}\right)=a^{n-1}x_1+\frac{b(1-a^{n-1})}{1-a}$$

유형2. $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$꼴은 $x_{n+2}-\alpha x_{n+1}=\beta(x_{n+1}-\alpha x_n)$꼴로 변형한다.

이때 $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-b$이므로 α, β는 방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이고,

$$x_{n+2}-\alpha x_{n+1}=\beta^n(x_2-\alpha x_1)\ \cdots\ ①$$

$$x_{n+2}-\beta x_{n+1}=\alpha^n(x_2-\beta x_1)\ \cdots\ ②$$

이다. $\alpha\neq\beta$일 때, ①−②에서

$$(\beta-\alpha)x_{n+1}=(\beta^n-\alpha^n)x_2+(\alpha^n\beta-\alpha\beta^n)x_1,\ x_{n+1}=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}x_2+\frac{\alpha^n\beta-\alpha\beta^n}{\beta-\alpha}x_1$$

이다. 또 $\alpha=\beta$일 때, $x_{n+2}-\alpha x_{n+1}=\alpha^n(x_2-\alpha x_1)$이므로 $y_n=\dfrac{x_n}{\alpha^n}$라고 하면

$$y_{n+2}-y_{n+1}=\frac{x_2-\alpha x_1}{\alpha^2},\ y_n=y_1+(n-1)\cdot\frac{x_2-\alpha x_1}{\alpha^2}=\frac{n-1}{\alpha^2}x_2-\frac{n-2}{\alpha}x_1$$

이다. 따라서 $x_n=(n-1)\alpha^{n-2}x_2-(n-2)\alpha^{n-1}x_1$이다.

유형3. $x_{n+1}=a+\dfrac{b}{x_n}$꼴은 a_n을 $a_1=1$, $a_{n+1}=x_n a_n$로 정의하면

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=a+\frac{ba_n}{a_{n+1}},\quad a_{n+2}=aa_{n+1}+ba_n$$

인 유형2 꼴로 변형한다.

유형4. $x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$꼴은 $c=0$이면 유형1꼴이다. $c\neq 0$이면 $x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{x_n+c}$꼴이 되고,

$x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{x_n+c}$꼴은 $y_n=x_n+c$로 치환하면 유형3 꼴로 변형한다.

문. 다음 수열이 정의되는 x_1을 구하고, 그때의 일반항 x_n을 구하라.

(1) $x_{n+1}=1+\dfrac{2}{x_n}$

(2) $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$

(3) $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}$

(4) $x_{n+1}=\dfrac{4x_n-2}{x_n+1}$

법구경에서

오늘은 어제의 생각에서 비롯되었고
오늘의 생각이 내일의 삶을 만든다.
삶은 이 마음이 만들어 내는 것이니
순수하지 못한 마음으로
말과 행동을 하면
고통이 그를 따른다.
수레의 바퀴가 소를 따르듯

오늘은 어제의 생각에서 비롯되었고
오늘의 생각이 내일의 삶을 만든다.
삶은 이 마음이 만들어 내는 것이니
순수한 마음으로 말과 행동을 하면
기쁨이 그를 따른다.
그림자가 물체를 따르듯

이 삶의 기나긴 여행길에서
나보다 나은 이나
나와 동등한 이를 만나지 못하면
외롭지만 차라리 홀로 가거라.
저 어리석은 자는 결코
여행길에 아무런 도움도 되지 않는다.

나의 결점을 일러주는 이
나의 결점을 꾸짖어주는 이
이런 사람을 만나거든 그를 따르라.
그는 나에게
보물이 감춰진 곳을 일러주는 사람이니

7. Cauchy수열

이 절에서는 Cauchy수열을 정의하고 Cauchy수열은 수렴함을 보인다.

바탕내용

바탕 1. Archimedes성질. 두 실수 a와 $b(b>0)$에 대해 $a<nb$ 인 $n\in\mathbb{N}$이 존재하고,
$\frac{1}{n}<b$ 인 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.

바탕 2. Bolzano-Weierstrass정리. 유계 수열은 수렴하는 부분수열을 가진다.

1. 정 의. 임의의 양수 ϵ 에 대해 $m>n>k$인 모든 $m,\ n\in\mathbb{N}$에 대해

$$|\ x_m-x_n\ |\ <\epsilon$$

인 자연수 $k(\epsilon)=k$가 존재하면, $<x_n>$ 을 Cauchy수열 또는 Cauchy라고 한다.

2. 보 기. (1) 주어진 $\epsilon>0$에 대해 Archimedes성질에 의해 $\frac{1}{\epsilon}<k$ 즉, $\frac{1}{k}<\epsilon$ 인 자연수 k 가 존재한다. 따라서 $x_n=\frac{1}{n}$ 인 수열 $<x_n>$ 에서 $m>n>k$인 모든 $m,\ n\in\mathbb{N}$에 대해

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\ <\ \frac{1}{n}\ <\ \epsilon$$

이므로 $\left\langle\frac{1}{n}\right\rangle$ 은 Cauchy이다.

(2) 수열 $<n>$ 은 $m\neq n$ 이면 $|x_m-x_n|\geq 1$ 이므로 Cauchy가 아니다.

(3) $a_n\ \downarrow\ 0$ 일 때, $0\leq a_1-a_2+a_3+\ \cdots\ +(-1)^{n-1}a_n\leq a_1$이다.

따라서 $x_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ 인 수열 $<x_n>$ 에서 $m>n$ 인 모든 $m,\ n\in\mathbb{N}$에 대해

$$|x_m-x_n|=\left|a_{n+1}-a_{n+2}+\ \cdots\ +(-1)^{m-n-1}a_m\right|\leq a_{n+1}$$

이므로 $<x_n>$ 은 Cauchy이다.

특히 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$, $y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ 인 수열 $<x_n>,\ <y_n>$ 은 Cauchy이다.

3. 정 리. 수렴하는 수열은 Cauchy수열이다.

증 명 수열 $< x_n >$ 이 a 에 수렴하고 양수 ϵ 이 주어졌다고 하자.
수렴의 정의에 의해 $n > k$인 모든$n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_n - a | < \frac{\epsilon}{2}$$

인 자연수 k가 존재한다. 따라서 $m > n > k$인 모든 m, $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_n - x_m | \leq | x_n - a | + | x_m - a | < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로 $< x_n >$은 Cauchy수열이다.

4 정 리. Cauchy수열은 유계이다.

증 명 $< x_n >$ 이 Cauchy이면, $\epsilon = 1$에 대해 $m > n > k$인 모든 m, $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_m - x_n | < 1$$

인 자연수 k가 존재한다. 따라서 $n > k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_n | < | x_{k+1} | + 1$$

이다. 이제

$$M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_k|, |x_{k+1}| + 1\}$$

로 놓으면 모든 $n \in N$ 에 대해 $| x_n | \leq M$이므로 $< x_n >$ 은 유계이다.

5. 보 기. (1) $x_n = n + (-1)^n n$ 인 수열 $< x_n >$은 유계가 아니므로 Cauchy가 아니다.
(2) $x_n = (-1)^n$ 인 수열 $< x_n >$ 은 유계이지만 Cauchy가 아니다. 즉, 정 리 4의 역은 성립하지 않는다.

6. 정 리. Cauchy수열은 수렴한다.

증 명 Cauchy수열 $< x_n >$ 은 정 리 4에 의해 유계이므로 Bolzano-Weierstrass정리에 의해 수렴하는 부분수열 $< x_{n_k} >$가 존재한다.
이제 $< x_{n_k} >$가 a 로 수렴하면 $< x_n >$ 도 a 로 수렴함을 보이면 된다.
$< x_n >$ 이 Cauchy이므로 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $m > n > l_1$인 모든 m, $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_n - x_m | < \epsilon$$

인 자연수 l_1이 존재한다. 한편 $< x_{n_k} >$ 가 a에 수렴하므로 $k > l_2$인 모든 $k \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_{n_k} - a | < \epsilon$$

인 자연수 l_2가 존재한다. 따라서 $n > l = 1 + \max\{l_1, l_2\}$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$| x_n - a | \leq | x_n - x_{n_l} | + | x_{n_l} - a | < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

이므로 $< x_n >$ 도 a에 수렴한다.

7. 보 기. (1) 보 기 2(3)에서 $a_n \downarrow 0$ 일 때, $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ 인 수열 $< x_n >$ 은 Cauchy 이므로 수렴한다.

(2) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ 인 수열 $< x_n >$ 은 Cauchy이므로 수렴한다.

이때 $x_n \to -\ln 2$ 임을 뒤에서 보일 수 있다.

(3) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ 인 수열 $< x_n >$ 은 Cauchy이므로 수렴한다.

이때 $x_n \to \frac{1-e}{e}$ 임을 뒤에서 보일 수 있다.

8. 정 의. 수열$< x_n >$에서 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \le c|x_{n+1} - x_n|$$

인 상수 $c\ (0 \le c < 1)$가 존재하면 $< x_n >$을 축소수열, c를 이 수열의 축소상수라고 한다.

9. 보조정리. 세 자연수 $k,\ n,\ m(k < n < m)$과 축소상수가 c 인 축소수열 $< x_n >$ 에서 다음이 성립한다.

(1) $|x_{m+1} - x_m| \le c^{m-n}|x_{n+1} - x_n|$ (2) $|x_m - x_n| \le \frac{c^{n-k}}{1-c}|x_{k+1} - x_k|$

증 명 (1) $|x_{m+1} - x_m| \le c|x_m - x_{m-1}| \le c^2|x_{m-1} - x_{m-2}| \le \cdots \le c^{m-n}|x_{+1} - x_n|$

(2) $|x_m - x_n| = \left|\sum_{l=n}^{m-1}(x_{l+1} - x_l)\right| \le \sum_{l=n}^{m-1}|x_{l+1} - x_l| \le \sum_{l=n}^{m-1} c^{l-n}|x_{n+1} - x_n| \le \frac{c^{n-k}}{1-c}|x_{k+1} - x_k|$

10. 정 리. 축소수열은 수렴한다.

증 명 축소수열 $< x_n >$ 의 축소상수가 c 라고 하자.
보조정리 9(2)에 의해 $m > n$ 인 자연수 $m,\ n$에 대해

$$|x_m - x_n| \le \frac{c^{n-1}}{1-c}|x_2 - x_1|$$

이다. c 가 $0 \le c < 1$인 상수이므로 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해

$$\frac{c^k}{1-c} \mid x_2 - x_1 \mid < \epsilon$$

인 자연수 k 가 존재한다. 이 k 에 대해 $n > k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$\frac{c^{n-1}}{1-c}|x_2 - x_1| \le \frac{c^k}{1-c} \mid x_2 - x_1 \mid < \epsilon$$

이므로 $< x_n >$ 은 Cauchy이다. 따라서 축소수열은 수렴한다.

11. 따름정리. 축소상수가 c 인 축소수열 $< x_n >$ 에서 $x_n \to a$ 이면 다음이 성립한다.

(1) $|x_n - a| \le \dfrac{c^{n-1}}{1-c}|x_2 - x_1|$

(2) $|x_n - a| \le \dfrac{c}{1-c}|x_n - x_{n-1}|$

증 명 (1) 보조정리 9(2)에 의해 $m > n$ 인 자연수 m, n에 대해

$$|x_m - x_n| \le \frac{c^{n-1}}{1-c}|x_2 - x_1|$$

이므로 이 식에서 $m \to \infty$ 하면 (1)이 된다.

(2) 보조정리 9(2)에 의해 $m > n > k = n-1$인 자연수 m, n에 대해

$$|x_m - x_n| \le \frac{c}{1-c}|x_n - x_{n-1}|$$

이므로 이 식에서 $m \to \infty$ 하면 (2)가 된다.

12. 보 기. $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + x_{n-1}}{3}(n \ge 2)$이면

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \frac{\left|x_n - x_{n-1}\right|}{3}$$

이다. 따라서 $< x_n >$이 축소수열이므로 정 리 10에 의해 수렴한다. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$로 놓으면

$x_{n+1} = \dfrac{2x_n + x_{n-1}}{3}$에서 $\alpha = \dfrac{2\alpha + \alpha}{3}$이므로 α를 구할 수 없다.

그러나 점화식을 풀면 $x_n = \dfrac{3b+a}{4} - \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(b-a)$이므로 $\alpha = \dfrac{3b+a}{4}$이다.

13. 보 기. $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$ 이면 수학적 귀납법에 의해 $2 \le x_n \le 3$이므로

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}\right| = \frac{\left|x_n + x_{n_1}\right|\left|x_n - x_{n_1}\right|}{x_n^2\, x_{n-1}^2} \le \frac{(3+3)\left|x_n - x_{n_1}\right|}{2^2 2^2} = \frac{3}{8}\left|x_n - x_{n_1}\right|$$

이다. 따라서 $< x_n >$이 축소수열이므로 정 리 10에 의해 수렴한다.

14. 보 기. $x_1 = a\ (0 \le a \le 1),\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 3}{7}\ (n \ge 1)$ 인 수열 $< x_n >$ 에서

$$0 \le x_1 \le 1 \text{ 이므로 } 0 \le x_2 \le 1$$

이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$0 \le x_n \le 1$$

이다. 따라서

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{7}|x_{n+1}^4 - x_n^4| = \frac{1}{7}|x_{n+1} - x_n||x_{n+1} + x_n||x_{n+1}^2 + x_n^2| \le \frac{4}{7}|x_{n+1} - x_n|$$

이므로 $< x_n >$ 은 축소수열이다. 그러므로 $< x_n >$ 은 수렴하고

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$$

로 놓으면

$$0 \le \alpha \le 1$$

이고 α 는 방정식

$$x^4 - 7x + 3 = 0$$

의 근이다. 또 $0 \le \beta \le 1$ 가 방정식 $x^4 - 7x + 3 = 0$ 의 근이면

$$\alpha^4 - 7\alpha + 3 = \beta^4 - 7\beta + 3$$

에서

$$(\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 - 7) = 0$$

이고, $0 \le \alpha,\ \beta \le 1$ 에서

$$\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 \le 4$$

이므로 $\alpha = \beta$이다.

따라서 $0 \le x_1 \le 1$ 이면 x_1 의 값에 관계없이 $< x_n >$은 같은 값으로 수렴한다.

이제 α 의 근삿값을 구하여 보자.

축소상수가 $\dfrac{4}{7}$ 이고 $7(x_{n+1} - x_n) = x_n^4 - 7x_n + 3$ 이다.

따라서 $x_1 = \dfrac{3}{7}$ 으로 잡으면 $|x_2 - x_1| = \dfrac{3^4}{7^5}$ 이므로 따름정리 10(1)에 의해

$$|x_n - \alpha| \le \frac{3^3}{7^4} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}$$

이다. 그러므로 α 의 근삿값을 $\dfrac{3}{7}$ 으로 택하면 오차는 $\dfrac{3^3}{7^4}$ 이하가 된다.

핵심내용

1. Cauchy수열, 축소수열

2. 수렴하는 수열은 Cauchy수열이고 Cauchy수열은 수렴한다.

3. 축소수열은 수렴한다.

연습문제

1. 다음 수열 $< x_n >$ 은 Cauchy인가?

(1) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ (2) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ (3) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$

2. $< x_n >$, $< y_n >$이 Cauchy이면 $< x_n + y_n >$, $< x_n y_n >$도 Cauchy인가?

3. x_n이 모두 정수이고, $< x_n >$ 이 Cauchy이다. $m,\ n \geq k$이면 $x_m = x_n$ 인 자연수 k가 존재하는가?

4. $|\alpha| < 1$일 때, $x_{n+2} = (1+\alpha)x_{n+1} - \alpha x_n$인 수열 $< x_n >$은 수렴함을 보이고 그 극한을 구하라.

5. 다음 수열 $< x_n >$ 은 수렴함을 보여라.

(1) $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 8}{x_n + 1}$ (2) $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 2x_n^2 + 7}{10}$

(3) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 - 2x_n + 8}{6}$ (4) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{3x_n^2}$

(5) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n^3}$ (6) $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{x_n^2}$

6. 수렴하지만 축소수열이 아닌 수열을 하나 구하라.

7. $30\alpha = \alpha^3 + 1,\ 0 < \alpha < 1$인 α의 근삿값으로 오차가 10^{-9}이하인 것을 하나 구하라.

8. $\lim_{n\to\infty} |x_{n+2022} - x_n| = 0$ 이지만 유계가 아닌 수열 $< x_n >$을 하나 구하라.

☆9. $\lim_{n\to\infty} \left(x_{n^2} - x_n\right) = 0$이지만 유계가 아닌 수열 $< x_n >$을 하나 구하라.

☆10. 각 자연수 n에 대해 $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$이다.

(1) 유계가 아닌 수열 $< x_n >$을 하나 구하라.

(2) $0 \leq x_n \leq 3$이지만 수렴하지 않는 $< x_n >$을 하나 구하라.

☆11. $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \dfrac{4x_n}{1 + x_n^2}$인 수열 $< x_n >$은 수렴함을 보이고 그 극한을 구하라.

눈물은 왜 짠가

함민복

지난 여름이었습니다. 가세가 기울어 갈 곳이 없어진 어머니를 고향 이모님 댁에 모셔다 드릴 때의 일입니다. 어머니는 차 시간도 있고 하니까 요기를 하고 가자시며 고깃국을 먹으러 가자고 하셨습니다. 어머니는 한평생 중이염을 앓아 고기만 드시면 귀에서 고름이 나오곤 했습니다. 그런 어머니가 나를 위해 고깃국을 먹으러 가자고 하시는 마음을 읽자 어머니 이마의 주름살이 더 깊게 보였습니다. 설렁탕집에 들어가 물수건으로 이마에 흐르는 땀을 닦았습니다.

"더울 때일수록 고기를 먹어야 더위를 안 먹는다. 고기를 먹어야 하는데..... 고깃국물이라도 되게 먹어 둬라"

설렁탕에 다대기를 풀어 한 댓 숟가락 국물을 떠먹었을 때였습니다. 어머니가 주인아저씨를 불렀습니다. 주인아저씨는 뭐 잘못된 게 있나 싶었던지 고개를 앞으로 빼고 의아해하며 다가왔습니다. 어머니는 설렁탕에 소금을 너무 많이 풀어 짜서 그런다며 국물을 더 달라고 했습니다. 주인아저씨는 흔쾌히 국물을 더 갖다 주었습니다. 어머니는 주인아저씨가 안 보고 있다 싶어지자 내 투가리에 국물을 부어주셨습니다. 나는 당황하여 주인아저씨를 흘금거리며 국물을 더 받았습니다. 주인아저씨는 넌지시 우리 모자의 행동을 보고 애써 시선을 외면해 주는 게 역력했습니다. 나는 그만 국물을 따르시라고 내 투가리로 어머니 투가리를 툭, 부딪쳤습니다. 순간 투가리가 부딪치며 내는 소리가 왜 그렇게 서럽게 들리던지 나는 울컥 치받치는 감정을 억제하려고 설렁탕에 만 밥과 깍두기를 마구 씹어댔습니다. 그러자 주인아저씨는 우리 모자가 미안한 마음 안 느끼게 조심, 다가와 성냥갑만한 깍두기 한 접시를 놓고 돌아서는 거였습니다. 일순, 나는 참고 있던 눈물을 찔끔 흘리고 말았습니다. 나는 얼른 이마에 흐른 땀을 훔쳐내려 눈물을 땀인 양 만들어 놓고 나서, 아주 천천히 물수건으로 눈동자에서 난 땀을 씻어냈습니다. 그러면서 속으로 중얼거렸습니다.

'눈물은 왜 짠가.'

8. 실수 지수

이 절에서는 $x\in\mathbb{R}$에 대해 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$이고 $x\in\mathbb{Q}$에 대해 $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$임을 보이고, 이를 이용하여 실수 지수를 정의한다.

바탕 1. $<x_n>$ 이 유계인 증가수열이면 수렴하고 $\lim\ x_n=\sup\{x_n$ 이다.

바탕 2. $0\le a_k\le 1$에 대해 $1-(a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n)\le(1-a_1)(1-a_2)\ \cdots\ (1-a_n)\le 1$이다.

바탕 3. $m\in\mathbb{N}$과 $0\le x\le m$인 실수 x에 대해

$$x_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ y_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+m}$$

라 하면 $x_n<x_{n+1},\ y_n>y_{n+1}$이다.

바탕 4. 두 자연수 m과 n에 대해 $\left(1+\frac{m}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn}<\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n+m}$이다.

1. 정 리. 다음이 성립한다.

(1) $m\in\mathbb{N}$에 대해 $\sum_{k=0}^{n}\frac{m^k}{k!}\le 3^m$이다.

(2) $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$인 수열 $<x_n>$은 수렴한다. 이때 $e=\lim_{n\to\infty}x_n$으로 정의한다.

증 명 (1) $m\in\mathbb{N}$에 관한 수학적 귀납법으로 증명한다.
$m=1$일 때, $k\ge 2$인 $k\in\mathbb{N}$에 대해

$$\frac{1}{k!}\le\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

이므로

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\le\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{n}\le 1,\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\le 3$$

이다. 따라서 $m=1$일 때 성립한다.

$m=p$일 때, 부등식 $\sum_{k=0}^{n}\frac{p^k}{k!}\le 3^p$이 성립한다고 하자.

$$\frac{(p+1)^k}{k!}=\sum_{l=0}^{k}\frac{{}_kC_l}{k!}p^l=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{(k-l)!}\cdot\frac{p^l}{l!}$$

이므로 $\sum_{k=0}^{n}\frac{(p+1)^k}{k!}$에서 p^l의 계수는 $\frac{1}{l!}\sum_{k=l}^{n}\frac{1}{(k-l)!}$이다.

또 $m=1$일 때 보인 바에 의해 $\sum_{k=l}^{n}\frac{1}{(k-l)!}\le 3$이므로

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(p+1)^k}{k!}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{3p^k}{k!}=3\sum_{k=0}^{n}\frac{p^k}{k!}\le 3\cdot 3^m=3^{m+1}$$

이다. 따라서 $m=p+1$일 때도 성립한다.
(2) $x_n\uparrow$이고 (1)에 의해 $x_n\le 3$이다. 따라서 $<x_n>$은 유계인 증가수열이므로 수렴한다.

2. 정 리. $x \in \mathbb{R}$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \right| \le \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!}$

(2) $x \ge 0$이면 $0 \le \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$이다.

(3) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$이고 $\lim_{n-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$이다.

증 명 (1), (2) 바탕 2에 의해 $2 \le k \le n$인 $k \in \mathbb{N}$에 대해

$$1 - \frac{k(k-1)}{2n} \le \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} \cdot k! \le 1$$

이므로

$$0 \le \frac{1}{k!} - \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} \le \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(k-2)!}$$

이다. 따라서

$$\left| \frac{x^k}{k!} - {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| \le \frac{x^2}{2n} \cdot \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!},\ x \ge 0\text{이면 } 0 \le \frac{x^k}{k!} - {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{x}{n}\right)^k \le \frac{x^2}{2n} \cdot \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}$$

이고 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{x}{n}\right)^k$이므로 (1), (2)가 성립한다.

(3) $x=1$을 (2)에 대입하여 정리하면

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

이고 압축정리에 의해 $\lim_{n-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$이다.

3. 정 리. $x\in\mathbb{R}$에 대해 $x_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$라 하면 다음이 성립한다.

(1) 수열 $<x_n>$은 수렴한다. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\exp(x)$로 놓자.

이때 $\exp(0)=1=e^0$이고 정 리 7(3)에 의해 $\exp(1)=e$이며, $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$이다.

(2) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\exp(x)$이고 $\left|\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{x}{n}\right)^k-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\le\frac{x^2}{2n}\exp(|x|)$이다.

증 명 (1) $x=0$일 때는 자명하다.
이제 $x>0$일 때 $<x_n>$은 수렴함을 보인다.
정 리 8에 의해 $<x_n>$은 증가수열이고 정 리 2(2)와 정 리 1(1)에 의해 $x\le m$인 $m\in\mathbb{N}$에 대해

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{m^k}{k!}\le 3^m$$

이므로 $<x_n>$은 수렴한다. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\exp(x)$로 놓자.

또 바탕 2에 의해

$$1-n\cdot\frac{x^2}{n^2}\le\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\le 1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\frac{1}{\exp(x)}=\exp(-x)$$

이므로 $x\in\mathbb{R}$에 대해 $<x_n>$은 수렴한다.

(2) 정 리 1(1)과 정 리 2(1)에 의해 $|x|\le m$인 $m\in\mathbb{N}$에 대해

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\le\frac{x^2}{2n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\le\frac{x^2}{2n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{m^k}{k!}\le\frac{r^2}{2n}\cdot 3^m$$

이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^2}{2n}\cdot 3^m=0$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\exp(x)$이므로 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\exp(x)$이다.

이제 $\sum_{k=0}^{n}\frac{|x|^k}{k!}\le\exp(|x|)$이므로 $\left|\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{x}{n}\right)^k-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\le\frac{x^2}{2n}\exp(|x|)$이다.

4. 정 리. $m \in \mathbb{N}$에 대해 $\exp(m) = e^m$이다.

증 명 $a_n = \left(1+\frac{m}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^m$, $c_n = \left(1+\frac{m}{n}\right)^{n+m}$이라 하면 바탕 4에 의해 $a_n \le b_n \le c_n$이다. 정 리 3(1)에 의해 $\lim_{n\to\infty} a_n = \exp(m)$이고, 정 리 2(3)에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n = e^m$이며,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\frac{m}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{m}{n}\right)^m = \exp(m) \cdot 1 = \exp(m)$$

이므로 $\exp(m) = e^m$이다.

5. 정 리. $r \in \mathbb{Q}$에 대해 $\exp(r) = e^r$이다.

증 명 $r = 0$일 때, $\exp(0) = 1 = e^0$이므로 성립한다.

$r > 0$일 때, $r = \frac{q}{p}$(p, q는 자연수)에 대해

$$a_n = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{pn} = \left(1+\frac{q}{np}\right)^{pn}, \quad b_n = \left(1+\frac{q}{n}\right)^n$$

이라고 하자. 이때 $a_n = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{pn} = \left\{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right\}^p$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \{\exp(r)\}^p$이고 $b_{np} = a_n$이다.

또 정 리 4에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n = e^q$이이므로

주어진 $\epsilon > 0$에 대해 $n \ge k$이면 $\left|b_n - e^q\right| < \epsilon$인 $k \in N$

가 존재한다. 따라서 $n \ge k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$\left|b_{np} - e^q\right| = \left|a_n - e^q\right| < \epsilon$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = e^q$이다. 따라서 $\{\exp(r)\}^p = e^q$이므로 $\exp(r) = \left(e^q\right)^{\frac{1}{p}} = e^r$이다.

$r < 0$일 때, $-r > 0$이므로 $\frac{1}{\exp(r)} = \exp(-r) = e^{-r} = \frac{1}{e^r}$이므로 $\exp(r) = e^r$이다.

6. 정 의. 다음과 같이 정의한다.

(1) 무리수 x에 대해 e^x를 $e^x = \exp(x)$로 정의한다.

(2) 함수 $y = e^x$의 역함수를 $y = \ln x$로 나타낸다. 즉 $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$이다.

(3) $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$에 대해 a^x를 $a^x = e^{x \ln a}$로 정의한다.

(4) $a > 0$, $a \ne 1$에 대해 $y = a^x$일 때, $x = \log_a y$로 정의한다.

7. 정 리. $x\in\mathbb{R}$에 대해 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$이다.

증 명 $x\in\mathbb{Q}$이면 정 리 5와 정 리 3(2)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$이다.

$x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$이면 정 의 6(1)과 정 리 3(2)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$이다.

다음 보조정리는 정 리 7을 이용하여 보일 수 있다.

8. 보조정리. $|x|\le 1$, $|\ln(1+t)|\le 1$ 즉 $\frac{1-e}{e}\le t\le e-1$일 때 다음이 성립한다.

(1) $\frac{|x|}{2}\le|e^x-1|\le 2|x|$ (2) $|e^x-1-x|\le x^2$

(3) $\frac{|\ln(1+t)|}{2}\le|t|\le 2|\ln(1+t)|$ (4) $|\ln(1+t)-t|\le 4t^2$

9. 정 리. $x\in\mathbb{R}$와 $a\neq 1$인 양수 a 및 수열 $<x_n>$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $x_n\to x\Leftrightarrow a_n^x\to a^x$

(2) $x>0$, $x_n>0$일 때 $x_n\to x\Leftrightarrow\log_a x_n\to\log_a x$이다.

증 명 (1) $|a_n^x-a^x|=a^x|a^{x_n-x}-1|=a^x|e^{(x_n-x)\ln a}-1|$이므로 보조정리 8(1)에 의해 성립한다.

(2) $|\ln a||\log_a x_n-\log_a x|=\left|\ln\frac{x_n}{x}\right|=\left|\ln\left(1+\frac{x_n-x}{x}\right)\right|$이므로 보조정리 8(3)에 의해 성립한다.

10. 정 리. $a_n\to 0$이고 $a_n b_n\to\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n}=e^{\alpha}$이다.

증 명 $(1+a_n)^{b_n}=e^{b_n\ln(1+a_n)}$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n\ln(1+a_n)=\alpha$임을 보이면 된다.

보조정리 8(4)에 의해 $|\ln(1+t)|\le 1$일 때 $|\ln(1+t)-t|\le 4t^2$이므로

$$|b_n\ln(1+a_n)-b_n a_n|\le 4|a_n^2 b_n|$$

이고 $\lim_{n\to\infty}4|a_n^2 b_n|=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n\ln(1+a_n)=\alpha$이다.

11. 지수법칙. $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,$ 두 실수 x와 y에 대해 다음이 성립한다.

(1) $a^x\,a^y=a^{x+y}$ (2) $(ab)^x=a^x\,b^x$ (3) $(a^x)^y=a^{xy}$

증 명 $x_n\ \to\ x,\ y_n\ \to\ y,\ x_n\in\mathbb{Q},\ y_n\in\mathbb{Q}$라 하자.

(1) $x_n\in\mathbb{Q},\ y_n\in\mathbb{Q}$이므로 $a_n^x\,a_n^y=a^{x_n+y_n}$이고 정 리 9(1)에 의해 $a_n^x\,a_n^y\ \to\ a^xa^y$, $a^{x_n+y_n}\ \to\ a^{x+y}$이므로 $a^x\,a^y=a^{x+y}$ 이다.

(2) $x_n\in\mathbb{Q}$이므로 $(ab)_n^x=a^{x_n}b_n^x$이고 정 리 9(1)에 의해 $(ab)_n^x=(ab)^x,\ a_n^x\,b_n^x\ \to\ a^xb^x$이므로 $(ab)^x=a^x\,b^x$이다.

(3) $k\in\mathbb{N}$에 대해 (1)에 의해 $(a^x)^k=a^x\,a^x\cdots a^x=a^{x+x\cdots+x}=a^{kx}$이다.

또 $(a^x)^{-k}=\dfrac{1}{(a^x)^k}=\dfrac{1}{a^{kx}}=a^{-kx}$이다. 따라서 정수 k에 대해 $(a^x)^k=a^{kx}$이다.

$p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ r=\dfrac{p}{q}$에 대해

$$(a^x)^{\frac{p}{q}}=\left\{(a^x)^p\right\}^{\frac{1}{q}}=(a^{px})^{\frac{1}{q}}=\lim_{n\to\infty}(a^{px_n})^{\frac{1}{q}}=\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{px_n}{q}}\right)=a^{rx}$$

이므로 $(a^x)^y=\lim_{n\to\infty}(a^x)^{y_n}=\lim_{n\to\infty}a^{xy_n}=a^{xy}$ 이다.

12. 로그의 성질. $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,$ 실수 x에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\ln ab=\ln a+\ln b$ (2) $\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}$ (3) $\ln a^x=x\ln a$ (4) $a^x=e^{x\ln a}$

증 명 (1) $\alpha=\ln a,\ \beta=\ln b$라 하면 $a=e^\alpha,\ b=e^\beta,\ ab=e^\alpha e^\beta=e^{\alpha+\beta}$이므로 $\alpha+\beta=\ln ab$이다.

(2) $\alpha=\ln a,\ \beta=\ln b$라 하면 $a=e^\alpha,\ b=e^\beta=(e^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}=a^{\frac{\beta}{\alpha}}$이므로 $\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}$이다.

(3) $x=\log_a a^x=\dfrac{\ln a^x}{\ln a}$이므로 $\ln a^x=x\ln a$이다.

(4) $e^{\ln a^x}=a^x$이고 (3)에 의해 $e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$이므로 $a^x=e^{x\ln a}$이다.

핵심내용

1. e의 정 의. 지수함수와 로그함수의 정의 및 성질. $\lim_{n-\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=e$

2. $\left|\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right|\ \le\ \dfrac{x^2}{2n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\dfrac{|x|^k}{k!},\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}=e^x$

3. 실수 x와 $a\neq 1$인 양수 a 및 수열 $<x_n>$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $x_n\ \to\ x\ \Leftrightarrow\ a_n^x\ \to\ a^x$

(2) $x>0,\ x_n>0$일 때 $x_n\ \to\ x\ \Leftrightarrow\ \log_a x_n\ \to\log_a x$이다.

4. $a_n\ \to\ 0$이고 $a_n\,b_n\ \to\ \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n}=e^\alpha$이다.

연습문제

1. e 는 무리수임을 보여라.

2. 자연수 m에 대해 $e-\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}<\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m!}$임을 보여라.

3. 자연수 n에 대해 부등식 $\frac{1}{n!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$이 성립함을 보여라.

4. $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$, $b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값을 구하라.

5. $x_n>0$, $x_n\to\infty$에 대해 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{e^{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{x_n}=0$임을 보여라.

6. 보조정리 8이 성립함을 보여라.

7. 두 양수 a와 b에 대해 $1<ax_n^b\le y_n$이고 $y_n\to\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}x_n^{\frac{1}{y_n}}=1$임을 보여라.

8. $0\neq x_n\to 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{e_n^x-1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$임을 보여라.

9. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(3^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}-5^{\frac{1}{n}}\right)^n$

10. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n+2}\right)^n$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+3}{n^2+n+1}\right)^{n^2+n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n\ln n+1}{n^4-n^2\ln n+3}\right)^{n^2-n\ln n}$ (4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n+3^n+2^n}{4^n+3^n+1}\right)^{2^n}$

11. $x_n\to\infty$, $a_n\to a$일 때, $x\in\mathbb{R}$에 대해 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{x_n}\right)^{x_na_n}=e^{ax}$임을 보여라.

12. 자연수 n과 $x>0$에 대해 $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1+x}\le\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x}$임을 보여라.

☆13. $a_k=\frac{k^2}{k^2+\sqrt{k}}$, $b_n=a_1a_2,\cdots a_n$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$임을 보여라.

☆14. $0<a_k\le 1$일 때, 다음이 성립하기 위한 필요충분조건을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)<\infty$ (2) $\lim_{n\to\infty}(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>0$

수열을 이용한 지수의 정의

1. 보조정리. $x_n \to \alpha$ 이면 다음을 만족시키는 두 수열 $<a_n>$과 $<b_n>$이 존재한다.

$$a_n \uparrow \alpha,\ b_n \downarrow \alpha,\ a_n \in \mathbb{Q},\ b_n \in \mathbb{Q},\ a_n < x_n < b_n$$

증 명 $d_n = \sup\{|\alpha - x_k|\}_{k=n}^{\infty},\ \beta_1 = d_1 + 1,\ \beta_{n+1} = d_n + \frac{1}{n+1}$이라 하자.

이때 $x_n \in [\alpha - d_n,\ \alpha + d_n]$이다. 또 $x_n \to \alpha$ 이므로 $d_n \downarrow 0,\ \beta_{n+1} < \beta_n,\ \beta_n \downarrow 0$이다.

따라서 $(\alpha - \beta_n,\ \alpha - \beta_{n+1})$에서 $a_n \in \mathbb{Q}$를 택하면

$$a_n < \alpha - \beta_{n+1} < \alpha - d_n \le x_n,\ a_n < \alpha - \beta_{n+1} < a_{n+1}$$

이므로 $a_n \uparrow \alpha,\ a_n < x_n$이다.

또 $(\alpha + \beta_n,\ \alpha + \beta_{n+1})$에서 $b_n \in \mathbb{Q}$를 택하면 같은 방법으로 $b_n \downarrow \alpha,\ x_n < b_n$이다.

2. 보조정리. $a > 0,\ x_n > 0,\ x_n \in \mathbb{Q},\ x_n \to 0$이면 $a^{x_n} \to 1$이다.

증 명 $a > 1$인 경우만 보인다. $a^{\frac{1}{n}} \downarrow 1$이므로 주어진 $\epsilon > 0$에 대해 $n \ge k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$인 $k \in \mathbb{N}$가 존재한다.

따라서 $r \in \mathbb{Q},\ 0 < r < \frac{1}{k}$이면 $1 < a^r < a^{\frac{1}{k}}$이므로 $0 < a^r - 1 < a^{\frac{1}{k}} - 1 < \epsilon$이다.

이제 $x_n \to 0$이므로 $n > k_1$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x_n < \frac{1}{k}$인 자연수 k_1이 존재한다.

따라서 $n > k_1$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $0 < a^{x_n} - 1 < a^{\frac{1}{k}} - 1 < \epsilon$이므로 $a^{x_n} \to 1$이다.

3. 정 리. $a > 0,\ x_n \to \alpha,\ y_n \to \alpha,\ x_n \in \mathbb{Q},\ y_n \in \mathbb{Q}$이면 수열 $\langle a^{x_n} \rangle$과 $\langle a^{y_n} \rangle$은 같은 값으로 수렴한다.

증 명 $a > 1$인 경우만 보인다. 보조정리 1에 의해

$$a_n \uparrow \alpha,\ b_n \downarrow \alpha,\ a_n \in \mathbb{Q},\ b_n \in \mathbb{Q},\ a_n < x_n < b_n$$
$$c_n \uparrow \alpha,\ d_n \downarrow \alpha,\ c_n \in \mathbb{Q},\ d_n \in \mathbb{Q},\ c_n < y_n < d_n$$

인 수열 $<a_n>,\ <b_n>$과 $<c_n>,\ <d_n>$이 존재하고, $a^{a_n} < a_n^x < a_n^b,\ a^{c_n} < a_n^y < a_n^d$이다.

또 $\langle a^{a_n} \rangle,\ \langle a^{c_n} \rangle$은 유계인 증가수열, $\langle a^{b_n} \rangle,\ \langle a^{d_n} \rangle$은 유계인 감소수열이므로 수렴한다.

이때 $a^{a_n} \to A,\ a^{b_n} \to B,\ a^{c_n} \to C,\ a^{d_n} \to D$라 하면

$$a^{b_n} = a^{a_n} a^{b_n - a_n},\ a^{d_n} = a^{c_n} a^{d_n - c_n},\ a^{d_n} = a^{a_n} a^{d_n - a_n}$$

이고 보조정리 2에 의해

$$a^{b_n - a_n} \to 1,\ a^{d_n - c_n} \to 1,\ a^{d_n - a_n} \to 1$$

이므로 $A = B,\ C = D,\ A = D$이다.

그런데 $a^{a_n} < a_n^x < a_n^b,\ a^{c_n} < a_n^y < a_n^d$이므로 압축정리에 의해 $a^{x_n} \to A,\ a^{y_n} \to A$이다.

4. 정 의. (1) $a>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$에 대해 a^{α}을 정 리 3의 공통된 값으로 정의한다.
(2) $a>0,\ a\neq 1$에 대해 $y=a^{x}$일 때, $x=\log_a y$로 정의하고, $\ln y=\log_e y$이다.

5. 지수법칙. $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,$ 두 실수 x와 y에 대해 다음이 성립한다.
(1) $a^x\,a^y=a^{x+y}$ (2) $(ab)^x=a^x b^x$ (3) $(a^x)^y=a^{xy}$

증 명 $x_n\in\mathbb{Q},\ y_n\in\mathbb{Q},\ x_n<x,\ y_n<y,\ x_n\uparrow x,\ y_n\uparrow y$라 하자.
(1) $a^x\,a^y=\lim_{n\to\infty}a^{x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}a^{y_n}=\lim_{n\to\infty}a^{x_n+y_n}=a^{x+y}$
(2) $(ab)^x=\lim_{n\to\infty}(ab)^{x_n}=\lim_{n\to\infty}a_n^x\,b^{x_n}=\lim_{n\to\infty}a_n^x\lim_{n\to\infty}b^{x_n}=a^x\,b^x$
(3) $k\in\mathbb{N}$에 대해 (1)에 의해 $(a^x)^k=a^x\,a^x\cdots a^x=a^{x+x\cdots+x}=a^{kx}$이다.
또 $(a^x)^{-k}=\dfrac{1}{(a^x)^k}=\dfrac{1}{a^{kx}}=a^{-kx}$이다. 따라서 $k\in\mathbb{Z}$에 대해 $(a^x)^k=a^{kx}$이다.
$r=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$($p$와 q는 서로소)에 대해

$$(a^x)^{\frac{p}{q}}=\left\{(a^x)^p\right\}^{\frac{1}{q}}=(a^{px})^{\frac{1}{q}}=\lim_{n\to\infty}(a^{px_n})^{\frac{1}{q}}=\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{px_n}{q}}\right)=a^{rx}$$

이므로 $(a^x)^y=\lim_{n\to\infty}(a^x)^{y_n}=\lim_{n\to\infty}a^{xy_n}=a^{xy}$ 이다.

6. 로그의 성질. $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ x\in\mathbb{R}$에 대해 다음이 성립한다.
(1) $\ln ab=\ln a+\ln b$ (2) $\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}$ (3) $\ln a^x=x\ln a$ (4) $a^x=e^{x\ln a}$

증 명 (1) $\alpha=\ln a,\ \beta=\ln b$라 하면 $a=e^{\alpha},\ b=e^{\beta},\ ab=e^{\alpha}e^{\beta}=e^{\alpha+\beta}$이므로 $\alpha+\beta=\ln ab$이다.
(2) $\alpha=\ln a,\ \beta=\ln b$라 하면 $a=e^{\alpha},\ b=e^{\beta}=(e^{\alpha})^{\frac{\beta}{\alpha}}=a^{\frac{\beta}{\alpha}}$이므로 $\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}$이다.
(3) $x=\log_a a^x=\dfrac{\ln a^x}{\ln a}$이므로 $\ln a^x=x\ln a$이다.
(4) $e^{\ln a^x}=a^x$이고 (3)에 의해 $e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$이므로 $a^x=e^{x\ln a}$이다.

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$을 이용한 지수의 정의

1. 정 리. $x\in\mathbb{R}$에 대해 $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$인 수열 $<x_n>$은 수렴한다.

이때 $\exp(x)=\lim_{n\to\infty}x_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, $\exp(1)=e$로 정의한다.

증 명 $p=[|x|]+1$로 놓자. 주어진 $\epsilon>0$에 대해 $\frac{p^p}{p!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2p}<\epsilon$인 $k\in\mathbb{N}$가 존재한다.

$l\geq 3p$인 $l\in\mathbb{N}$에 대해

$$\frac{|x|^l}{l!}\leq\frac{p^l}{l!}=\frac{p^{2p}}{(2p)!}\cdot\frac{p}{2p+1}\cdot\cdots\cdot\frac{p}{l}\leq\frac{p^{2p}}{(2p)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2p}\leq\frac{p^p}{p!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2p}$$

이므로 $3p\leq n\leq m$인 n, $m\in\mathbb{N}$에 대해

$$\sum_{l=n}^{m}\frac{|x|^l}{l!}\leq\frac{p^p}{p!}\sum_{l=n}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-2p}<\frac{p^p}{p!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2p}$$

이다. 따라서 $m>n\geq k+3p$이면

$$|x_m-x_n|\leq\sum_{l=n}^{m}\frac{|x|^l}{l!}<\frac{p^p}{p!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2p}<\epsilon$$

이므로 $<x_n>$은 Cauchy가 되어 수렴한다.

2. 보조정리. 두 실수 $x,\ y$에 대해 $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$이다.

증 명 $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},\ y_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{y^k}{k!},\ z_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x+y)^k}{k!},\ \left(\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}b_kx^k\right)=\sum_{k=0}^{2n}c_kx^k$라 하면

$$0\le k\le n\text{일 때 }c_k=\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l},\quad n+1\le k\le 2n\text{일 때 }c_k=\sum_{l=k-n}^{n}a_lb_{k-l}$$

이므로 다음이 성립한다.

[1] $x_ny_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\frac{1}{(k-l)!}x^ly^{k-l}\right)+\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\sum_{l=k-n}^{n}\frac{1}{l!}\frac{1}{(k-l)!}x^ly^{k-l}\right)$

[2] $0\le k\le n$일 때 $\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\frac{1}{(k-l)!}x^ly^{k-l}=\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_lx^ly^{k-l}=\frac{1}{k!}(x+y)^k$

[3] $n+1\le k\le 2n$일 때

$$\left|\sum_{l=k-n}^{n}\frac{1}{l!}\frac{1}{(k-l)!}x^ly^{k-l}\right|\le\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\frac{1}{(k-l)!}\left|x^ly^{k-l}\right|=\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_l\left|x^ly^{k-l}\right|=\frac{(|x|+|y|)^k}{k!}$$

[4] $\left|x_ny_n-z_n\right|\le\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{(|x|+|y|)^k}{k!}$

이제 $m=[|x|+|y|]+1$로 놓자. $n\ge 3m,\ n+1\le k\le 2n$에 대해

$$\frac{(|x|+|y|)^k}{k!}\le\frac{m^k}{k!}=\frac{m^{2m}}{(2m)!}\cdot\frac{m}{2m+1}\cdot\cdots\cdot\frac{m}{k}\le\frac{m^{2m}}{(2m)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2m}\le\frac{m^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2m}$$

이므로

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{(|x|+|y|)^k}{k!}\le\frac{m^m}{m!}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2m}<\frac{m^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2m}$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{(|x|+|y|)^k}{k!}=0$이고,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\exp(x),\ \lim_{n\to\infty}y_n=\exp(y),\ \lim_{n\to\infty}z_n=\exp(x+y)$$

이므로 $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$이다.

3. 보조정리. $x\in\mathbb{R}$와 $r\in\mathbb{Q}$에 대해 $\exp(rx)=(\exp(x))^r$이다.

증 명 $\exp(0)=1=e^0$이고, $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$이므로 수학적 귀납법에 의해 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $\exp(nx)=(\exp(x))^n$, $\exp(n)=e^n$이다. 또

$$1=\exp(0)=\exp(nx-nx)=\exp(nx)\exp(-nx)=(\exp(x))^n\exp(-nx)$$

이므로 $\exp(-nx)=\dfrac{1}{(\exp(x))^n}=(\exp(x))^{-n}$이다.

따라서 $n\in\mathbb{Z}$에 대해 $\exp(nx)=(\exp(x))^n$이다. 이제 $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, $r=\dfrac{p}{q}$에 대해

$$(\exp(x))^p=\exp(px)=\exp(qrx)=(\exp(rx))^q$$

이므로 $\exp(rx)=(\exp(x))^{\frac{p}{q}}=(\exp(x))^r$이다.
특히 $x=1$일 때, $\exp(1)=e$이므로 $\exp(r)=e^r$이다.

4. 정 의. 다음과 같이 정의한다.
(1) $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$에 대해 $e^x=\exp(x)$로 정의한다.
(2) $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$

5. 정 리. $x\in\mathbb{R}$, 두 양수 a와 b, $r\in\mathbb{Q}$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $e^x=\exp(x)$ (2) $e^{x+y}=e^xe^y$ (3) $e^{rx}=(e^x)^r$ (4) $\ln ab=\ln a+\ln b$ (5) $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$

증 명 (1) $x\in\mathbb{Q}$이면 보조정리 3에 의해 $e^x=\exp(x)$이고 $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$이면 정 의 4(1)에 의해 $e^x=\exp(x)$이다.
(2) 보조정리 2와 정 의 4(1)에 의해 자명하다.
(3) 보조정리 3과 정 의 4(1)에 의해 자명하다.
(4) $\alpha=\ln a$, $\beta=\ln b$라 하면 $a=e^\alpha$, $b=e^\beta$, $ab=e^\alpha e^\beta=e^{\alpha+\beta}$이므로 $\alpha+\beta=\ln ab$이다.
(5) $\alpha=\ln a$, $\beta=\ln b$라 하면 $a=e^\alpha$, $b=e^\beta$, $\dfrac{a}{b}=a\cdot\dfrac{1}{b}=e^\alpha e^{-\beta}=e^{\alpha-\beta}$이므로 $\alpha-\beta=\ln\dfrac{a}{b}$이다.

6. 보조정리. 양수 a와 $r\in\mathbb{Q}$에 대해 $e^{r\ln a}=a^r$이다.

증 명 보조정리 3에 의해 $e^{r\ln a}=(e^{\ln a})^r$이고 정 의 4(2)에 의해 $e^{\ln a}=a$이므로 $e^{r\ln a}=a^r$이다.

7. 정 의. $x \in \mathbb{R}$와 양수 a에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$에 대해 $a^x = e^{x\ln a}$로 정의한다.

(2) $a \neq 1$에 대해 $y = e^{x\ln a}$일 때 $x = \log_a y$로 정의한다.

8. 정 리. $x \in \mathbb{R}$와 $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $a^x = e^{x\ln a}$

(2) $\ln a^x = x\ln a$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

(5) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

(6) $a^{x+y} = a^x\, a^y$

(7) $(ab)^x = a^x b^x$

증 명 (1) $x \in \mathbb{Q}$이면 보조정리 6에 의해 $a^x = e^{x\ln a}$이고 $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$이면 정 의 7(1)에 의해 $a^x = e^{x\ln a}$이다.

(2) $\ln a^x = \ln e^{x\ln a} = x\ln a$

(3) $(a^x)^y = e^{y\ln a^x} = e^{xy\ln a} = a^{xy}$

(4) $x = \log_a b$라 하면 $b = a^x$이므로 $\ln b = \ln a^x = x\ln a$이다. 따라서 $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$이다.

(5) $\log_a bc = \dfrac{\ln bc}{\ln a} = \dfrac{\ln b + \ln c}{\ln a} = \dfrac{\ln b}{\ln a} + \dfrac{\ln c}{\ln a} = \log_a b + \log_a c$

(6) $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a} e^{y\ln a} = a^x\, a^y$

(7) $(ab)^x = e^{x\ln ab} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x\ln a + x\ln b} = e^{x\ln a} e^{x\ln b} = a^x\, a^y$

프란치스코 교황의 권고문에서

인류는 지금 역사적 전환점을 겪고 있는 중입니다. 그것은 우리가 많은 분야에서 일어나고 있는 진전으로부터 확인할 수 있습니다. 우리는 건강관리와 교육 그리고 통신과 같은 영역에서 복지를 개선하기 위한 조치가 행해지고 있는 것에 대해서는 찬양할 수 있습니다. 동시에 우리는 우리와 동시대를 살고 있는 대다수 사람이 하루하루를 근근이 살아가면서 비참한 상황에 처해 있다는 사실을 기억해야 합니다. …… 삶의 기쁨은 사라지고, 타인에 대한 존중의 결여와 폭력 및 불평등이 눈에 띄게 증가하고 있습니다. 이것은 살기위한 투쟁, 흔히는 최소한의 품위도 없는 삶을 살기 위한 투쟁입니다.

'살인하지 말라'는 계명이 인간생명의 가치를 보호하기 위해서 분명한 한계를 설정한 것처럼, 오늘날 우리는 배제와 불평등의 경제에 대해 '그러지 말라'고 말해야 합니다. 늙은 노숙자가 추위 속에 죽는 것은 뉴스가 되지 않고, 증권시장의 지수가 2포인트 내려간 것은 큰 뉴스가 되고 있습니다. 어떻게 이런 일이 있을 수 있을 까요? 이것은 배제의 경우입니다. 사람이 굶어 죽어가고 있는데 음식이 버려지고 있는 것을 우리는 계속 구경만 할 수 있을 까요? 이것은 불평등의 경우입니다.

소수의 소득이 기하급수적으로 증가하는 동안, 그 행복한 소수가 즐기는 번영으로부터 다수를 갈라놓는 간극도 기하급수적으로 증가하고 있습니다. 이 불균형은 시장의 절대적 자율성과 금융투기를 옹호하는 이데올로기의 결과입니다. …… 그렇게 하여 새로운 독재가 태어났습니다. 이 독재는 보이지 않고 종종 가상적이지만, 그자신의 법칙과 룰을 무자비하게 강요합니다. … 권력과 소유에 대한 갈망은 한계를 모릅니다. 이윤의 증가에 방해가 되는 것은 모조리 집어삼키는 경향이 있는 이 시스템에서는 환경과 같은 취약한 것은 무엇이든지 유일한 지배자인 신격화된 시장의 이해관계 앞에서 무방비 상태가 됩니다.

돈은 봉사해야지 돈이 지배해서는 안 됩니다. 교황은 부유한 이든 가난한 이든 똑같이 사랑합니다. 그러나 그는 부자는 빈자를 돕고, 존경하고, 끌어올려야한다는 것을 그리스도의 이름으로 상기시킬 의무가 있습니다. 나는 여러분이 너그러운 연대를 맺고, 경제학과 금융이 인간에게 혜택을 주도록 윤리적 접근방식을 회복할 것을 권고합니다.

9. 함수의 극한

이 절에서는 $\epsilon-\delta$ 를 이용하여 함수의 극한을 정의하고, 기본성질을 알아본다.
이절에서 E는 공집합이 아닌 실수의 부분집합이다.

0. 바탕내용

바탕 1. 수열 $< x_n >$ 와 실수 $a\in\mathbb{R}$에서, 임의의 양수 ϵ 에 대해

$$n > k \text{ 이면 } |x_n - a| < \epsilon \text{ 인 자연수 } k(\epsilon) = k$$

가 존재하면 수열 $< x_n >$은 a 로 수렴한다 하고, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 또는 $x_n \to a$ 로 나타낸다.
또 $< x_n >$ 가 a 로 수렴하지 않으면 $x_n \nrightarrow a$ 로 나타낸다.

바탕 2. 수렴하는 수열은 그 극한이 유일하다.

바탕 3. $x_n \to a,\ y_n \to b,\ \alpha\in\mathbb{R}$이면 다음이 성립한다.

(1) $\alpha x_n + y_n \to \alpha a + b$ (2) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$ (3) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ (단, $y_n \neq 0$ 이고 $b \neq 0$)

바탕 4(압축정리). 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해 $x_n \le y_n \le z_n$ 인 수열 $< x_n >$, $< y_n >$, $< z_n >$에서 $x_n \to a,\ z_n \to a$ 이면 $y_n \to a$ 이다.

바탕 5. 모든 수열은 단조부분수열을 가진다.

바탕 6. Bolzano-Weierstrass정리. 유계 수열은 수렴하는 부분수열을 가진다.

1. 정 의. $E\subset\mathbb{R}$와 $a\in\mathbb{R}$에 대해 다음과 같이 정의한다.
(1) 각각의 주어진 $\epsilon > 0$에 대해

$$E\cap(a-\epsilon,\ a+\epsilon)-\{a\} \neq \varnothing$$

이면 a 를 E의 집적점(accumulation point)이라 한다.
(2) E의 집적점 전체집합을 E'로 나타낸다.

2. 보 기. $E=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이면 $E'=\varnothing$, $E=(0,\ 1)$이면 $E'=[0,\ 1]$, $E=(0,\ 1)\cap\mathbb{Q}$이면 $E'=[0,\ 1]$, $E=\left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ 이면 $E'=0$, $E=\mathbb{Q}$이면 $E'=\mathbb{R}$이다.

3. 정 리. $E \subset \mathbb{R}$와 $a \in \mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) a가 E의 집적점이다.
(2) $a_n \in E,\ a_n \neq a,\ a_n \to a$인 수열 $< a_n >$이 존재한다.

증 명 (1) $\Rightarrow$ (2) 각 $n \in N$ 에 대해 $\epsilon = \frac{1}{n}$라 하면

$$E \cap (a-\epsilon,\ a+\epsilon) - \{a\} = E \cap \left(a - \frac{1}{n},\ a + \frac{1}{n}\right) - \{a\} \neq \varnothing$$

이다. 따라서

$$a_n \in \left[\left(a - \frac{1}{n},\ a + \frac{1}{n}\right) - \{a\}\right] \cap E \ \text{ 즉, } 0 < |a - a_n| < \frac{1}{n}$$

인 $a_n \in E$이 존재한다. 이 수열 $< a_n >$ 이 조건을 만족시킨다.
(2) $\Rightarrow$ (1) 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $n \geq k$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$0 < |a_n - a| < \epsilon$$

인 $k \in \mathbb{N}$가 존재한다. 따라서

$$a_k \in E \cap (a-\epsilon,\ a+\epsilon) - \{a\} \neq \varnothing$$

이므로 a는 E의 집적점이다.

4. Bolzano-Weierstrass 정리. $E \subset \mathbb{R}$가 유계인 무한집합이면 E는 집적점을 가진다.

증 명 E가 유계인 무한집합이면 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E,\ m = n \Leftrightarrow x_m = x_n$인 수열 $< x_n >$이 존재한다. 따라서 바탕 6에 의해 수렴하는 부분수열 $< x_{n_k} >$가 존재하고 $x_{n_k} \to a$라 하면 $a \in E'$이다.

5. 정 리. 집합 $A,\ B \subset \mathbb{R}$에 대해 $A' \cup B' = (A \cup B)'$ 이다.

증 명1
$a \in (A \cup B)' \Leftrightarrow$ 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $(A \cup B) \cap (a-\epsilon,\ a+\epsilon) - \{a\} \neq \varnothing$
$\Leftrightarrow$ 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $(A \cap (a-\epsilon,\ a+\epsilon) - \{a\}) \cup (B \cap (a-\epsilon,\ a+\epsilon) - \{a\}) \neq \varnothing$
$\Leftrightarrow$ 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $A \cap (a-\epsilon,\ a+\epsilon) - \{a\} \neq \varnothing$
또는 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $B \cap (a-\epsilon,\ a+\epsilon) - \{a\} \neq \varnothing$
$\Leftrightarrow$ $a \in A'$ 또는 $a \in B'$
$\Leftrightarrow$ $a \in (A' \cup B')$ 또는 $a \in B'$

증 명2 집적점의 정의에 의해 $E \subset F$이면 $E' \subset F'$이므로 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$ 이다. 한편 $a \in (A \cup B)'$ 이면 $a_n \in A \cup B,\ a_n \neq a,\ a_n \to a$인 수열 $< a_n >$ 이 존재하므로

$$\{a_{n_k}\} \subset A \text{ 또는 } \{a_{n_k}\} \subset B$$

인 $< a_n >$ 의 부분수열 $< a_{n_k} >$ 이 존재한다. 따라서

$$a \in A' \ \text{ 또는 } \ a \in B'$$

이므로 $a \in A' \cup B'$ 이다.

6. 정 의. $E \subset \mathbb{R}$, 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E'$, $L \in \mathbb{R}$에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해

$$0 < |x-a| < \delta,\ x \in E \text{ 이면 } |f(x)-L| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$ 가 존재하면 $x = a$ 에서 f 의 극한(limit)이 존재한다고 한다. 이 때, L 을 $x = a$ 에서 f 의 극한값이라고 하며 이것을 기호로는

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 나타낸다.

(2) 임의의 양수 M에 대해

$$0 < |x-a| < \delta,\ x \in E \text{ 이면 } f(x) > M$$

인 양수 $\delta = \delta(M)$ 가 존재하면 $x = a$ 에서 f는 ∞ 로 발산한다고 하고, 이것을 기호로는

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

로 나타낸다.

(3) E 가 유계가 아닐 때, 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해

$$M < x,\ x \in E \text{ 이면 } |f(x)-L| < \epsilon$$

인 양수 $M = M(\epsilon)$가 존재하면 $x = \infty$ 에서 f의 극한이 존재한다고 한다. 이 때, L 을 $x = \infty$ 에서 f의 극한값이라고 하며 이것을 기호로는

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

로 나타낸다.

(4) 같은 방법으로 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 등도 정의한다.

7. 정 리. p : '$0 < |x-a| < \delta,\ x \in E$이면 $|f(x)-L| < \epsilon$'라 하면 다음은 서로 동치이다.

(1) 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 p인 $\delta > 0$가 존재한다.

(2) 임의의 $0 < \epsilon < 1$에 대해 p인 $\delta > 0$가 존재한다.

(3) 임의의 $0 < \epsilon < 1$에 대해 p인 $0 < \delta < 1$가 존재한다.

(4) 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 p인 $0 < \delta < 1$가 존재한다.

8. 보 기. (1) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2$는 $x = 1$ 에서 극한이 2 이다.

풀 이. 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $\delta(\epsilon) = 1$ 로 택한다. 이때

$$0 < |x-1| < 1 \text{ 이면 } |f(x) - 2| = 0 < \epsilon \text{ 이다.}$$

따라서 $x = 1$ 에서 극한이 존재하고, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ 이다.

(2) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$는 $x = 2$ 에서 극한이 4 이다.

풀 이. 주어진 $\epsilon > 0$에 대해 $0 < |x-2| < \delta$이면 $|2x - 4| < \epsilon$인 $\delta > 0$ 를 찾으면 된다.

$\delta = \frac{\epsilon}{2}$ 로 놓자. 이때 $0 < |x-2| < \delta$ 이면 $|2x - 4| < \epsilon$ 이므로 $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ 이다.

(3) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$은 $x = 2$ 에서 극한이 4 이다.

풀 이. 주어진 $\epsilon > 0$에 대해 $0 < |x-2| < \delta$이면 $|x^2 - 4| < \epsilon$인 $\delta > 0$를 찾으면 된다.

$|x-2| \le 1$ 이면 $1 \le x \le 3$ 이므로 $3 \le x+2 \le 5$ 이다. 따라서

$$|x^2 - 4| = |x-2|\,|x+2| \le 5 \cdot |x-2|$$

이므로 $|x-2| < \delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}$ 이면 $|x^2 - 4| < \epsilon$ 이다.

(4) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{|x|}$는 $x = 9$ 에서 극한이 3 이다.

풀 이. $|\sqrt{|x|} - 3| = \frac{|x-9|}{\sqrt{x} + 3} \le |x-9|$ 이므로 $|x-9| < \delta = \epsilon$이면 $|\sqrt{|x|} - 3| < \epsilon$이다.

(5) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$은 $x = a$ 에서 극한이 a^2 이다.

풀 이. 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $0 < |x-a| < \delta$ 이면 $|x^2 - a^2| < \epsilon$ 인 $\delta > 0$ 를 찾으면 된다.

$$|x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |(x-a)^2 + 2a(x-a)| \le |x-a|\,(|x-a| + 2|a|)$$

이므로 $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$ 이고 $|x-a| < \delta$ 이면 $|x^2 - a^2| < \epsilon$ 이다.

(6) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{|x|}$는 $x = a\ (a \ge 0)$에서 극한이 $\sqrt{a}$ 이다.

풀 이. 일반적으로 $0 \le s < t$ 에 대해

$$\sqrt{t} - \sqrt{s} \le \sqrt{t-s}$$

이므로 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \le \sqrt{|x-a|}$ 이다.

따라서 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $\delta = \epsilon^2$ 이고 $|x-a| < \delta$ 이면 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$이다.

다음 정리는 함수의 극한을 수열의 극한으로 바꾸어 준다.

9. 정 리. $E\subset\mathbb{R}$, $f : E\to\mathbb{R}$, $a\in E'$, $a_n\in E$, $a_n\neq a$, $L\in\mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x=a$ 에서 f 의 극한이 존재하고 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 이다.

(2) $a_n\to a$이면 $f(a_n)\to L$ 이다.

(3) $<a_n>$이 $a_n\to a$인 단조수열이면 $f(a_n)\to L$ 이다.

증 명 (1) $\Rightarrow$ (2) 임의의 $\epsilon>0$ 에 대해

$$0<|x-a|<\delta,\ x\in E \text{ 이면 } |f(x)-L|<\epsilon$$

인 양수 $\delta=\delta(\epsilon)$ 가 존재한다. 또 $a_n\to a$이므로 앞에서 찾은 δ 에 대해

$$n>k \text{ 이면 } |a_n-a|<\delta$$

인 $k\in\mathbb{N}$가 존재하고 $a_n\neq a$ 이므로 $0<|a_n-a|<\delta$ 이다.

따라서 $n>k$ 이면 $|f(a_n)-L|<\epsilon$ 이므로 $f(a_n)\to L$ 이다.

(2) $\Rightarrow$ (3) 자명하다.

(3) $\Rightarrow$ (1) 대우가 참임을 보인다. 즉,

$$\lim_{x\to a} f(x)\neq L \text{ 이면 } a_n\to a\text{이지만 } f(a_n)\not\to L$$

인 단조수열 $<a_n>$이 존재함을 보이면 된다.

$\lim_{x\to a} f(x)\neq L$이면 다음을 만족시키는 적당한 $\epsilon>0$이 존재한다.

'모든 $\delta>0$ 에 대해 $0<|x-a|<\delta$, $x\in E$이지만 $|f(x)-L|\geq\epsilon$ 인 x 가 존재한다.'

이제 $\delta=\frac{1}{n}$ 로 잡으면 $0<|a_n-a|<\frac{1}{n}$이지만 $|f(a_n)-L|\geq\epsilon$인 $a_n\in E$이 존재한다.

따라서 바탕 5에 의해 $a_{n_k}\to a$인 $<a_n>$의 단조부분수열 $<a_{n_k}>$가 존재하고 $f(a_n)\not\to L$ 이다.

10. 정 리. 함수 $f : E\to\mathbb{R}$, $a\in E'$, $a_n\in E$, $a_n\neq a$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

(2) $a_n\to a$이면 $f(a_n)\to\infty$이다.

(3) $<a_n>$이 $a_n\to a$인 단조수열이면 $f(a_n)\to\infty$이다.

11. 정 리. 함수 $f : E\to\mathbb{R}$와 $L\in\mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$

(2) $a_n\to\infty$이면 $f(a_n)\to L$ 이다.

12. 정 리. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

(2) $a_n\to\infty$이면 $f(a_n)\to\infty$이다.

13. 보 기. 함수 $f : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x)=\sin\frac{1}{x}$에서 $0\in(\mathbb{R}-0)'$ 이다.

$x_n=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-1}$ 이면 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=1$이다. 한편, $x_n=\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)^{-1}$ 이면 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=-1$ 이다. 따라서 $x=0$ 에서 f 의 극한이 존재하지 않는다.

바탕 2와 정 리 9에 의해 다음이 성립한다.

14. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$와 집적점 $a\in E'$에 대해 $x=a$ 에서 $f(x)$의 극한값이 존재하면 그 극한값은 유일하다.

두 실수 a와 b에 대해 작지 않은 수를 $\max\{a, b,$ 크지 않은 수를 $\min\{a, b$ 라 하면 $\max\{a, b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$이고 $\min\{a, b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$ 이다. 따라서

$$\max\{f, g\}(x)=\max\{f(x), g(x)\},\quad \min\{f, g\}(x)=\min\{f(x), g(x)\}$$

라 하면 바탕 3과 정 리 9에 의해 다음이 성립한다.

15. 정 리. 상수 c 와 두 함수 $f : E \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R}$ 및 집적점 $a\in E'$에 대해 극한값 $\lim_{x\to a}f(x),\ \lim_{x\to a}g(x)$이 각각 존재하면 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$

(2) $\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$

(3) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$

(4) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0, \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$)

(5) $\lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a}f(x)|$

(6) $\lim_{x\to a}\max\{f(x), g(x)\}=\max\left\{\lim_{x\to a}f(x), \lim_{x\to a}g(x)\right\}$

(7) $\lim_{x\to a}\min\{f(x), g(x)\}=\min\left\{\lim_{x\to a}f(x), \lim_{x\to a}g(x)\right\}$

바탕 4와 정 리 9에 의해 다음이 성립한다.

16. 정 리. 세 함수 $f : E \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R},\ h : E \to \mathbb{R}$ 및 집적점 $a\in E'$에서, 모든 $x\in E$에 대해 $f(x)\le g(x)\le h(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=L$이다.

17. 정 의. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$와 $L \in \mathbb{R}$에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) a가 $E \cap (a, \infty)$의 집적점이고 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$0 < x-a < \delta,\ x \in E \text{이면 } |f(x)-L| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하면 $x=a$에서 f의 우극한이 존재한다고 한다. 이 때, L을 $x=a$에서 f의 우극한이라고 하며 이것을 기호로는

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

로 나타낸다. 앞으로 이 L을 $f(a+)$로 표시한다.

(2) a가 $E \cap (-\infty, a)$의 집적점이고 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$0 < a-x < \delta,\ x \in E \text{이면 } |f(x)-L| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하면 $x=a$에서 f의 좌극한이 존재한다고 한다. 이 때, L을 $x=a$에서 f의 좌극한이라고 하며 이것을 기호로는

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

로 나타낸다. 앞으로 이 L을 $f(a-)$로 표시한다.

18. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in (E \cap (a, \infty))' \cap (E \cap (-\infty, a))'$, $L \in \mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x=a$에서 f의 극한이 존재하고 $\lim_{x \to a} f(x) = L$이다.

(2) $x=a$에서 f의 좌극한과 우극한이 존재하고 $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$이다.

19. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in (E \cap (a, \infty))'$, $L \in \mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x=a$에서 f의 우극한이 존재하고 $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$이다.

(2) $a_n \in E$, $a_n > a$, $a_n \to a$이면 $f(a_n) \to L$이다.

(3) $a_n \in E$, $a_n > a$, $a_n \downarrow a$이면 $f(a_n) \to L$이다.

20. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in (E \cap (-\infty, a))'$, $L \in \mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x=a$에서 f의 좌극한이 존재하고 $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$이다.

(2) $a_n \in E$, $a_n < a$, $a_n \to a$이면 $f(a_n) \to L$이다.

(3) $a_n \in E$, $a_n < a$, $a_n \uparrow a$이면 $f(a_n) \to L$이다.

핵심내용

1. 집적점, $\epsilon-\delta$ 를 이용한 극한의 정의

$\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$, $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$

2. 집적점과 수열과의 관계 및 $A'\cup B'=(A\cup B)'$

3. Bolzano-Weierstrass 정리. 유계인 무한집합은 집적점을 가진다.

4. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a\in E'$, $a_n\in E$, $a_n\neq a$, $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$

(2) $a_n \to a$이면 $f(a_n) \to L$ 이다.

(3) $<a_n>$이 $a_n \to a$인 단조수열이면 $f(a_n) \to L$ 이다.

5. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

(2) $a_n \to \infty$이면 $f(a_n) \to L$이다.

6. 상수 c 와 두 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$에 대한

$$f+g,\ cf,\ fg,\ \frac{f}{g}(\text{단, } g(a)\neq 0),\ |f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f,g\}$$

의 극한에 대한 성질

7. 함수의 극한에 대한 압축정리

연습문제

1. 다음 각 집합A에 대해 A'를 구하라.

(1) $A=\left\{k+\frac{1}{n} \mid k, n\in\mathbb{N}\right\}$ (2) $A=\left\{n+\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

(3) $A=\left\{\frac{k}{2^n} \mid k, n\in\mathbb{N}\right\}$ (4) $A=\left\{\frac{k}{2^n} \mid k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

(5) $A=\mathbb{N}+\sqrt{2}\mathbb{N}$ ☆(6) $A=\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$

2. 집합 $E\subset\mathbb{R}$에 대해 다음을 보여라.

(1) $(E')^c\subset(E^c)'$ (2) $(E')'\subset E'$

3. A'이 가산무한집합이고 $A\subset[0, 2]$인 A를 하나 구하라.

4. 집합 $E=\left\{x \mid x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k},\ a_k\in\{3, 7\}\right\}$에 대해 E'를 구하라.

5. $A=\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k} \mid a_k\in\{0, 2\},\ n\in\mathbb{N}\right\}$, $I_{x,n}=\left(x-\frac{1}{3^n},\ x+\frac{1}{3^n}\right)$, $O_n=\bigcup_{x\in A}I_{x,n}$이다.

(1) A는 가산집합임을 보여라.

(2) $A\subset A'$임을 보여라.

(3) A'는 비가산집합임을 보여라.

(4) $\frac{1}{3}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 임을 보여라.

(5) $A\neq\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 임을 보여라.

6. $\epsilon-\delta$를 이용하여 다음을 증명하라.

(1) $\lim_{x\to1}(2x-1)=1$ (2) $\lim_{x\to1}x^3=1$ (3) $\lim_{x\to2}\sqrt{x+2}=2$ (4) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=1$

7. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to0}f(x)\sin\frac{1}{x}=0$임을 보여라.

8. 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{ 가 유리수}\\ 0, & x\text{ 가 무리수}\end{cases}$, $g(x)=\sin x$ 에 대해 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$임을 보여라.

9. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에서 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하면 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$임을 보여라.

10. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에서 $\lim_{x\to a} f(x) > 0$이다. 이때 $0 < |x-a| < \delta$ 이면 $f(x) > 0$인 $\delta > 0$ 가 존재함을 보여라.

11. 두 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에서 $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to b} g(x) = L$이다.

(1) $\lim_{x\to a} g(f(x)) \neq L$인 f, g를 구하라.

(2) f가 일대일이면 $\lim_{x\to a} g(f(x)) = L$임을 보여라.

12. $\epsilon-\delta$ 를 이용하여 정 리 14, 정 리 15, 정 리 16을 증명하라.

☆13. 함수 $f : [1, \infty) \to (1, \infty)$가 $x \geq 1$에 대해 $f(x)^2 \leq f(4x) \leq 2014^{\sqrt{x}}$을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하라.

(1) f가 증가함수이면 극한 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln f(x)}{\ln x}$이 존재함을 보여라.

(2) f가 연속함수이면 극한 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln f(x)}{\ln x}$이 존재함을 보여라.

(3) $\sup\{|f(x)| \mid 1 \leq x \leq 4\} > 1$이면 극한 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln f(x)}{\ln x}$이 존재함을 보여라.

(4) 극한 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln f(x)}{\ln x}$이 존재하지 않는 f가 존재함을 보여라.

죽으면서 태어나라

법정 스님

우리는 날마다 죽으면서 다시 태어나야 한다.
만일 죽음이 없다면 삶 또한 무의미해질 것이다.
삶의 배후에 죽음이 받쳐 주고 있기 때문에
삶이 빛날 수 있다.
삶과 죽음은 낮과 밤처럼 서로 상관관계를 갖는다.
영원한 낮이 없듯이 영원한 밤도 없다.
낮이 기울면 밤이 오고
밤이 깊어지면 새날이 가까워진다.
이와 같이 우리는 순간순간 죽어 가면서 다시 태어난다.

그러니 살 때는 삶에 전력을 기울여 뻐근하게 살아야 하고,
일단 삶이 다하면 미련 없이 선뜻 버리고 떠나야 한다.
열매가 익으면 저절로 가지에서 떨어지듯이,
그래야 그 자리에서 새로 움이 돋는다.
순간순간 새롭게 태어남으로써
날마다 새로운 날을 이룰 때,
그 삶에는 신선한 바람과 향기로운 뜰이 마련된다.
우리는 어디서 와서 어디로 가는 나그네인지
매 순간 살펴보아야 한다.

10. 함수의 연속

이 절에서는 $\epsilon-\delta$ 를 이용하여 함수의 연속을 정의하고, 기본성질을 알아본다.
이절에서 E와 F는 공집합이 아닌 실수의 부분집합이다.

0. 바탕내용

바탕 1. 모든 수열은 단조부분수열을 가진다.

바탕 2. 상수 c 와 두 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ 및 집적점 $a \in E'$에 대해 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$이 각각 존재하면 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x\to a}(f(x)+c\,g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + c\lim_{x\to a} g(x)$

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0, \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$) (4) $\lim_{x\to a}|f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$

1. 정 의. $E \subset \mathbb{R}$일 때, 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해

$$|x-a| < \delta,\ x \in E \text{ 이면 } |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하면, 즉 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 이면 $x = a$에서 f는 연속(continuous at a)이라 하고, 연속이 아니면 불연속(discontinuous at a)이라고 한다.

(2) f가 모든 점 $x \in E$에서 연속이면 f는 E에서 연속(continuous on E)이라고 한다.

2. 보 기. (1) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ 는 각 $a \in R$에 대해

$$|f(x)-f(a)| = |x-a|$$

이다. 주어진 $\epsilon > 0$에 대해 $\delta = \epsilon$ 로 놓자. 이때 $|x-a < \delta$ 이면 $|f(x)-f(a)| < \epsilon$이므로 f 는 R에서 연속이다.

(2) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ 가 R 에서 연속임을 보이기 위해서는 각 $a \in R$ 와 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $|x-a| < \delta$ 이면 $|x^2-a^2| < \epsilon$ 인 $\delta > 0$ 를 찾으면 된다.

$$|x^2-a^2| = |(x-a)(x+a)| = |(x-a)^2+2a(x-a)| \le |x-a|\,(|x-a|+2|a|)$$

이므로 $\delta = \min\left\{1,\ \frac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$ 이고 $|x-a| < \delta$ 이면 $|x^2-a^2| < \epsilon$ 이다.

연속의 정의의 대우를 택하면 다음과 같다.

3. 정 리. $E \subset \mathbb{R}$일 때, 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) f는 $x=a$에서 연속이 아니다.
(2) 다음을 만족시키는 양수 ϵ이 존재한다.
'임의의 양수 δ에 대해 $|x-a| < \delta$이지만 $|f(x)-f(a)| \geq \epsilon$ 인 $x \in E$ 가 존재한다.'

4. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $a_n \in E$, $a_n \to a$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) f는 $x=a$에서 연속이다.
(2) $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$
(3) $< a_n >$이 단조수열이면 $f(a_n) \to f(a)$이다.

증 명 (1) $\Rightarrow$ (2) 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$|x-a| < \delta,\ x \in E \text{이면 } |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재한다. 또 $a_n \to a$이므로 앞에서 찾은 δ에 대해

$$n > k \text{ 이면 } |a_n - a| < \delta$$

인 자연수 k가 존재한다. 따라서 $n > k$이면 $|f(a_n)-f(a)| < \epsilon$이므로 $f(a_n) \to f(a)$이다.
(2) $\Rightarrow$ (3) 자명하다.
(3) $\Rightarrow$ (1) 대우가 참임을 보인다. (2) $\Rightarrow$ (3) 자명하다.
(3) $\Rightarrow$ (1) 대우가 참임을 보인다. 즉,

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \text{이면 } a_n \to a \text{이지만 } f(a_n) \not\to f(a)$$

인 단조수열 $< a_n >$이 존재함을 보이면 된다.
$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$이면 다음을 만족시키는 적당한 $\epsilon > 0$이 존재한다.
'모든 $\delta > 0$ 에 대해 $|x-a| < \delta$, $x \in E$이지만 $|f(x)-f(a)| \geq \epsilon$ 인 x 가 존재한다.'
이제 $\delta = \frac{1}{n}$ 로 잡으면 $|a_n - a| < \frac{1}{n}$이지만 $|f(a_n)-f(a)| \geq \epsilon$인 $a_n \in E$이 존재한다.
따라서 바탕 1에 의해 $a_{n_k} \to a$인 $< a_n >$의 단조부분수열 $< a_{n_k} >$가 존재하고 $f(a_n) \not\to f(a)$이다.

5. 정 리. 두 함수 $f : E \to F$, $g : F \to \mathbb{R}$에서 f가 $x=a$에서 연속, g가 $x=f(a)$에서 연속이면 $h = g \circ f$도 $x=a$에서 연속이다.

증 명 $x_n \to a$, $x_n \in E$인 수열 $< x_n >$에 대해 f 가 $x=a$에서 연속이므로 $f(x_n) \to f(a)$이다. 또 g 가 $x=f(a)$에서 연속이므로 $< g(f(x_n)) >$ 이 $g(f(a))$로 수렴한다. 따라서 $g(f(x_n)) \to g(f(a))$이므로 $g \circ f$ 도 $x=a$에서 연속이다.

6. 보 기. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$ 는 $x = a$가 유리수이면 $\lim x_n = a$, $x_n \in Q^c$인 수열이 존재하고 $\lim f(x_n) = 0 \neq f(a)$ 이므로 $x = a$에서 불연속이다. 마찬가지로 무리수에서도 불연속이다.

바탕 2와 정 리 4에 의해 다음 정리가 성립한다.

7. 정 리. 두 함수 $f : E \to \mathbb{R}$와 $g : E \to \mathbb{R}$가 $x = a$ 에서 연속이고 c가 실수이면 함수

$$f+g,\ cf,\ fg,\ \frac{f}{g}(\text{단, } g(a) \neq 0),\ |f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f,g\}$$

도 $x = a$ 에서 연속이다.

8. 정 리. 다음 함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$는 무리수에서 연속, 유리수에서 불연속이다.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & x = \dfrac{q}{p}\left(\dfrac{p}{q} \text{는 기약분수}\right) \\ 0, & x \text{ 가 무리수} \end{cases}$$

증 명 $a \in [0, 1]$ 가 유리수이면

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1]$$

인 수열이 존재하고

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(a)$$

이므로 $x = a$ 에서 불연속이다.

$a \in [0, 1]$ 가 무리수이고 $\epsilon > 0$ 이 주어졌다고 하자. $\frac{1}{n} < \epsilon$ 인 자연수 n 을 택한다.

$[0, 1]$ 에 속하는 기약분수 $\frac{q}{p}$로 $p \leq n$인 것의 집합

$$A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

은 유한집합이다. 이제

$$\delta = \min\{\, |r - a| \mid r \in A \,\}$$

라 하자. 기약분수 $\frac{q}{p} \in [0, 1]$ 가 $\left|\frac{q}{p} - a\right| < \delta$ 이면 $p > n$ 이다.

따라서 $|x - a| < \delta,\ x \in [0, 1]$ 이면

$$|f(x) - f(a)| = |f(x)| < \frac{1}{n} < \epsilon$$

이 성립하므로 f 는 무리수에서 연속이다.

9. 정 의. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$에 대해 다음과 같이 정의한다.
(1) 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$0 \le x - a < \delta,\ x \in E \text{이면 } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하면 $x = a$에서 f는 오른쪽 연속이라고 한다.
(2) 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$0 \le a - x < \delta,\ x \in E \text{이면 } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하면 $x = a$에서 f는 왼쪽 연속이라고 한다.

10. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) f는 $x = a$에서 연속이다.
(2) f는 $x = a$에서 왼쪽 연속이고 오른쪽 연속이다.

11. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $a_n \in E$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) f는 $x = a$에서 오른쪽 연속이다.
(2) $a_n \to a$, $a_n \ge a$이면 $f(a_n) \to f(a)$이다.
(3) $a_n \downarrow a$이면 $f(a_n) \to f(a)$이다.

12. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $a_n \in E$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) f는 $x = a$에서 오른쪽 연속이다.
(2) $a_n \to a$, $a_n \le a$이면 $f(a_n) \to f(a)$이다.
(3) $a_n \uparrow a$이면 $f(a_n) \to f(a)$이다.

핵심내용

1. $\epsilon-\delta$ 를 이용한 연속, 왼쪽 연속, 오른쪽 연속의 정의

2. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $a_n \in E$, $a_n \to a$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) f는 $x=a$에서 연속이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

(3) $< a_n >$이 단조수열이면 $f(a_n) \to f(a)$이다.

3. 두 함수 $f : E \to F$, $g : F \to \mathbb{R}$에서 f가 $x=a$에서 연속, g가 $x=f(a)$에서 연속이면 $h=g \circ f$도 $x=a$에서 연속이다.

4. 두 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$가 $x=a$에서 연속이고 c가 상수이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

$$f+g,\ cf,\ fg,\ \frac{f}{g}(\text{단, } g(a)\neq 0),\ |f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f,g\}$$

5. 무리수에서만 연속인 함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$가 존재한다.
즉, 다음 함수 $f : [0, 1] \to R$는 무리수에서 연속, 유리수에서 불연속이다.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & x = \dfrac{q}{p}\left(\dfrac{p}{q} \text{는 기약분수}\right) \\ 0, & x \text{ 가 무리수} \end{cases}$$

연습문제

1. $\epsilon-\delta$를 이용하여 다음 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $\mathbb{R}$에서 연속임을 보여라.
(1) $f(x)=x^2+2x$ (2) $f(x)=x^3$ (3) $f(x)=x^3+x^2+1$

2. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)$은 $x=0$에서 연속임을 보여라.

3. 두 함수 f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $\mathbb{R}$에서 연속이고 $f|_Q=g|_Q$ 이면 $f=g$ 임을 보여라.

4. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x \text{ 가 유리수}\\ x, & x \text{ 가 무리수}\end{cases}$의 연속인 점을 모두 구하라.

5. $E=[1,2]\cup[3,4]$ 이고 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 연속이다.
(1) $g : R \to R$, $g|_E=f$ 인 연속함수 g 가 존재함을 보여라.
(2) f 가 일대일이면 g 도 연속이고 일대일인 것으로 구할 수 있는가?

6. $\epsilon-\delta$ 를 이용하여 정 리 5를 증명하라.

7. $\epsilon-\delta$ 를 이용하여 정 리 7을 증명하라.

8. $x=0$ 에서 연속이고, 다음을 만족시키는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 각각 모두 구하라.
(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (2) $f(2x+3y)=2f(x)+3f(y)$
(3) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ (4) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$

☆9. 다음을 만족시키는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 각각 모두 구하라.
(1) $f(x+3y)+2f(x-y)=3f(x)+f(y)$ (2) $(x^2-x+1)f(x^2)=f(x)$

☆10. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 서로소인 자연수 p와 정수 q에 대해 $f\left(\frac{q}{p}\right)=q\sin\frac{1}{p}$ 이다.
(1) 무리수 x 에 대해 $f(x)=0$ 일 때, f 가 연속인 점을 모두 구하라.
(2) 무리수 x 에 대해 $f(x)=x$ 일 때, f 가 연속인 점을 모두 구하라.

안으로 충만해지는 일

법정 스님

안으로 충만해지는 일은
밖으로 부자가 되는 일에 못지 않게
인생의 중요한 몫이다.
인간은 안으로 충만해질 수 있어야 한다.

아무 잡념 없이 기도를 올릴 때
자연히 마음이 넉넉해지는 것을 느낀다.
그때는 삶의 고민 같은 것이 끼어들지 않는다.
마음이 넉넉하고 충만하기 때문이다.

겉으로는 번쩍거리고 잘사는 것 같아도
정신적으로는 초라하고 궁핍하다.
크고 많은 것만을 원하기 때문에
작은 것과 적은 것에서 오는
아름다움과 살뜰함과 고마움을 잃어버렸다.

행복의 조건은 무엇인가.
아름다움과 살뜰함과 고마움에 있다.
나는 향기로운 차 한 잔을 통해
행복을 느낄 때가 있다.

내 삶의 고마움을 느낄 때가 있다.
산길을 가다가 무심히 피어 있는
한 송이 제비꽃 앞에서도
얼마든지 나는 행복할 수 있다,
그 꽃을 통해
하루의 일용할 양식을 얻을 수 있다.

또 다정한 친구로부터 들려오는 목소리,
전화 한 통을 통해서도 나는 행복해진다.

행복은 이처럼 일상적이고 사소한 데 있는 것이지
크고 많은데 있지 않다.

마음이 충만한 사람은 행복하다.
하늘나라가 그들의 것이다.
남보다 적게 갖고 있으면서도
그 단순함 속에서 아무 부족함 없이
소박한 기쁨을 잃지 않는 사람이야말로
청빈의 화신이다.
또 진정으로 삶을 살 줄 아는 사람이다.
그 어떤 어려운 상황에서도
생의 소박한 기쁨을 잃지 않는 것
그것이 바로 삶을 살 줄 아는 것이다.
그것은 모자람이 아니고 가득 참이다.

11. 연속함수의 성질

이 절에서는 최대최소의 정리와 사이값 정리 등 연속함수의 성질을 알아본다. 이절에서 E는 공집합이 아닌 실수의 부분집합이다.

0. 바탕내용

바탕 1. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$에서, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$|x-a| < \delta,\ x \in E \text{ 이면 } |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하면, 즉 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 이면 $x = a$에서 f는 연속이라 하고, f가 모든 점 $x \in E$에서 연속이면 f는 E에서 연속이라고 한다.

바탕 2(Bolzano-Weierstrass 정리). 유계 수열은 수렴하는 부분수열을 가진다.

바탕 3. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $a_n \in E$, $a_n \to a$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) f는 $x = a$에서 연속이다.

(2) $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$

(3) $< a_n >$이 단조수열이면 $f(a_n) \to f(a)$이다.

바탕 4. $x_n \nrightarrow 0$ 이면 $\left|x_{n_k}\right| \geq \epsilon$인 부분수열 $< x_{n_k} >$와 $\epsilon > 0$ 이 존재한다.

1. 정 의. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $A \subset E$에서 $f(A) \subset [-M, M]$ 인 양수 M이 존재하면 f가 A에서 유계라고 한다. 이때 $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in E\}$로 나타낸다.

2. 보조정리. 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이면 f는 $[a, b]$에서 유계이다.

증 명 f가 $[a, b]$에서 유계가 아니라면 각 자연수 n에 대해

$$|f(x_n)| > n$$

인 $x_n \in [a, b]$가 존재한다.

그런데 수열 $< x_n >$은 유계이므로 바 탕2에 의해 수렴하는 부분수열 $< x_{n_k} >$을 가진다. $x_{n_k} \to c$라 하면 $a \le x_{n_k} \le b$이므로 $a \le c \le b$이다. 또 f가 $x = c$에서 연속이므로 $f(x_{n_k}) \to f(c)$이다. 따라서 $< f(x_{n_k}) >$이 유계이므로 모순이다.

3. 정 리. 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이면 f는 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 즉 모든 $x \in [a, b]$에 대해 $f(c) \le f(x) \le f(d)$인 $c, d \in [a, b]$가 존재한다.

증 명 f가 $[a, b]$에서 최댓값을 가짐을 보인다.
f는 $[a, b]$에서 유계이므로 $\alpha = \sup f([a, b])$로 놓자. 이제 $f(d) = \alpha$인 $d \in [a, b]$가 존재함을 보이면 된다.
$\alpha = \sup f([a, b])$이므로 각 자연수 n에 대해

$$\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) < \alpha$$

인 $x_n \in [a, b]$이 존재하고

$$f(x_n) \to \alpha$$

이다. 그런데 수열 $< x_n >$은 유계이므로 바탕 2에 의해 수렴하는 부분수열 $< x_{n_k} >$을 가진다. $x_{n_k} \to d$라 하면 $a \le x_{n_k} \le b$이므로 $a \le d \le b$이다. 또 f가 $x = d$에서 연속이므로 $f(x_{n_k}) \to f(d)$이다. 따라서 $f(d) = \alpha$이다.

또 위에서 보인 바에 의해 $-f$가 $[a, b]$에서 최댓값을 가지므로 f는 최솟값을 갖는다.

4. 사이값정리. 함수 f 가 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) < m < f(b)$ 이면 $f(c)=m$이고 $a<c<b$인 c 가 존재한다.

증 명

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$$

로 놓고

$$f(p_1) = m$$

이면 $c = p_1$ 으로 택한다.

$f(p_1) \neq m$ 이면 $f(p_1) > m$ 또는 $f(p_1) < m$ 이다.

$f(p_1) > m$ 이면 $a_2 = a_1,\ b_2 = p_1$

$f(p_1) < m$ 이면 $a_2 = p_1,\ b_2 = b_1$

라 하고,

$$p_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$$

라 하자. 이때 $a_1 \le a_2 \le b_2 \le b_1$이고 $f(a_2) < m < f(b_2)$ 이다.

$f(p_2) = m$ 이면 $c = p_2$ 로 택한다. $f(p_2) \neq m$ 이면 $f(p_2) > m$ 또는 $f(p_2) < m$ 이다.

$f(p_2) > m$ 이면 $a_3 = a_2,\ b_3 = p_2$

$f(p_2) < m$ 이면 $a_3 = p_2,\ b_3 = b_2$

라 하고,

$$p_3 = \frac{a_3+b_3}{2}$$

라 하자. 이때 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le b_3 \le b_2 \le b_1$이고 $f(a_3) < m < f(b_3)$ 이다. $f(p_3) = m$ 이면 $c = p_3$ 로 택한다.

이 과정을 되풀이하여 $a_k,\ b_k,,\ p_k$를 잡고 $f(p_k) = m$ 이면 $c = p_k$ 로 택한다.

모든 k 에 대해 $f(p_k) \neq m$ 이면

$$a_k < b_k,\ a_n \uparrow,\ b_n \downarrow,\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}},\ f(a_k) < m < f(b_k)$$

이므로 두 수열 $< a_n >$과 $< b_n >$은 같은 값으로 수렴한다. $a_n \to c \leftarrow b_n$라고 하자.

f 가 연속이므로

$$f(a_n) \to f(c) \le m,\ f(b_n) \to f(c) \ge m$$

이다. 따라서

$$f(c) = m$$

이고 $a<c<b$인 c 가 존재한다.

5. 정 리. 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이면 $f([a, b])$는 유계인 닫힌구간이다.

증 명 $m = \inf f([a, b])$, $M = \sup f([a, b])$ 로 놓으면 정 리 3에 의해

$$m,\ M \in f([a, b]) \text{ 이고 } f([a, b]) \subset [m, M]$$

이다. 또 임의의 $k \in [m, M]$ 에 대해 사이값정리에 의해

$$k = f(c)$$

인 $c \in [a, b]$ 가 존재하므로 $k \in f([a, b])$ 이다. 따라서 $f([a, b]) = [m, M]$ 이다.

6. 정 리. 정의역이 구간 I인 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 연속이면 $f(I)$ 도 구간이다.

증 명 $\alpha,\ \beta \in f(I)\ (\alpha < \beta)$ 이면 $f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta$ 인 $a, b \in I$가 존재한다. f 가 연속이므로 사이값정리에 의해 $(\alpha, \beta) \subset f(I)$ 이다. 따라서 $f(I)$ 는 구간이다.

7. 정 의. 정의역이 구간 I인 함수 $f : I \to \mathbb{R}$에 대해 다음과 같이 정의한다.
(1) $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ [$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$]이면 f 를 증가함수[순증가함수]라고 한다.
(2) $x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$ [$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$]이면 f 를 감소함수[순감소함수]라고 한다.
(3) 증가 또는 감소함수를 단조함수라고 한다.

8. 정 리. 정의역이 구간 I인 순증가함수 f 가 $x = a$ 에서 연속이면 f 의 역함수 f^{-1} 는 $b = f(a)$ 에서 연속이다. 특히 일대일연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대해 f 의 역함수도 연속함수이다.

증 명1 f 가 순증가함수이면 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재하고 f^{-1} 도 순증가함수이다.
$a_1 < a < a_2$인 $a_1,\ a_2 \in I$가 존재하는 경우; 임의의 $\epsilon < \min\{a - a_1, a_2 - a\}$에 대해
$f(a - \epsilon) = b_1,\ f(a + \epsilon) = b_2,\ \delta = \min\{b - b_1, b_2 - b\}$라 하자.

$$|y - b| < \delta,\ y = f(x) \text{이면 } b_1 < y < b_2,\ a - \epsilon < x < a + \epsilon$$

이다. 따라서 $|y - b| < \delta$이면 $|f^{-1}(y) - a| < \epsilon$이므로 f^{-1} 는 $b = f(a)$ 에서 연속이다.
$a = \inf I$ 또는 $a = \sup I$인 경우도 같은 방법으로 보일 수 있다.

증 명2 f 가 순증가함수이면 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재하고 f^{-1} 도 순증가함수이다.
먼저 $y_n \downarrow b,\ y_n = f(x_n)$인 수열 $< y_n >$ 에 대해 $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b) = a$ 임을 보이자.
$< x_n >$ 은 감소수열이고 $x_n \ge a$ 이므로 $< x_n >$ 은 수렴한다.
$x_n \downarrow c$ 로 놓으면 $x_n \ge c \ge a$ 이므로 $y_n = f(x_n) \ge f(c) \ge f(a) = b$ 이다. 따라서

$$b \ge f(c) \ge f(a) = b$$

이므로 $c = a$ 이다. 같은 방법으로 $y_n \uparrow b,\ y_n = f(x_n)$인 수열 $< y_n >$ 에 대해
$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b)$임을 보일 수 있다. 따라서 바 탕 3에 의해 f^{-1} 는 $b = f(a)$ 에서 연속이다.

핵심내용

1. 연속함수 $f : [a, b] \to R$ 는 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

2. 사이값정리. 함수 f 가 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) < m < f(b)$ 이면 $f(c) = m$ 인 $a < c < b$인 c 가 존재한다.

3. 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이면 $f([a, b])$는 유계인 닫힌구간이다.

4. 정의역이 구간 I인 함수 f 가 연속이면 $f(I)$ 도 구간이다.

5. 정의역이 구간 I인 순증가함수 f 가 $x = a$ 에서 연속이면 f 의 역함수 f^{-1} 는 $b = f(a)$ 에서 연속이다. 특히 일대일함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 연속함수이면 f 의 역함수도 연속함수이다.

연습문제

1. 연속함수 $f : [a, b] \to (0, \infty)$에 대해 $f([a, b]) \subset [\alpha, \beta]$인 $0 < \alpha < \beta$가 존재함을 보여라.

2. 방정식 $a\cos x = x$ 는 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

3. 함수 f 가 $[1, 3]$에서 연속이면 $\frac{f(1)+f(2)+f(3)}{3} \in f([1, 3])$임을 보여라.

4. 함수 f 가 $[1, 5]$에서 연속일 때, 다음이 성립하기 위한 a와 b의 조건을 구하라.
(1) $\frac{af(1)+bf(5)}{9} \in f([1, 5])$ (2) $\frac{2f(1)+af(3)+bf(5)}{8} \in f([1, 5])$

5. 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이고 $f([a, b]) \subset \mathbb{Q}$이면 f 는 상수함수임을 보여라.

6. 함수 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$가 연속이다.
(1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g|_{\mathbb{Q}} = f$ 인 연속함수 g 가 존재하는가?
(2) f 가 유계이면 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g|_{\mathbb{Q}} = f$ 인 연속함수 g 가 존재하는가?

7. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 연속이고, $< x_n >$이 E에서 Cauchy 수열이다.
(1) $< f(x_n) >$은 Cauchy 수열인가?
(2) $E = \mathbb{R}$이면 $< f(x_n) >$은 Cauchy 수열임을 보여라.

8. $f(a) < f(b)$인 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$에서 임의의 $m \in (f(a), f(b))$에 대해 $f(c) = m$ 인 $c \in (a, b)$가 존재하면 f는 연속인가?

9. 함수 $f : [0, 1] \to [0, 1]$가 연속이면 $f(a) = a$인 $a \in [0, 1]$가 존재함을 보여라.

10. $\epsilon - \delta$ 를 이용하여 정 리 8을 증명하라.

읽을거리

웬델 베리 지음/이한중 옮김 '온 삶을 먹다'에서

1. 나는 우리가 기계로 일을 하면 세상이 기계처럼 보이고, 살아 있는 가축을 데리고 일하면 세상이 살아 있는 대상으로 보이지 않겠나 하는 생각을 한다. 아무튼 기계로 농사를 지으면 분명 땅과 가축에 대해 기계처럼 생각하기 쉽다. 심지어 자기 자신에 대해서도 기계적으로 생각하기 쉬운데, 트렉터의 지치지 않는 특성은 인간의 경험에 새로운 차원의 피곤함을 가져다주었다. 게다가 건강과 가족생활이라는 충분히 계산되지 않았던 비용까지 치르면서 말이다.

2. 살림이 없어진 환경에서 과학과 산업이 주도하는 농업은 지주와 자영업자의 수를 줄이는 상업경제의 목표에 크게 이바지했다. 그런 농업은 미국을 주인이 많은 나라에서 종업원이 많은 나라로 바꾸어 버렸다.

3. 들일을 사람대신 기계가 한다고 해서 꼭 발전인가? 일꾼의 역할이 줄고 기계의 역할이 느는 게 꼭 향상인가? 기계적인 힘을 더 갖게 되었다고 해서 일꾼이 흥미와 만족을 더 느끼며 항상 더 낫게, 더 유능하게 일하는가? 일꾼은 보행적인 농장 일을 하는 게 나은가, 도시 빈민가에서 실업자가 되는 게 나은가? 어느 경우가 그 나라에 도움이 되는가?

4. 나는 실질적으로 생산의 질을 보장하는 유일한 방법은 생산자가 자신이 생산한 것을 기본적인 생존수단으로 이용하며 사는 원칙에 잇음을 점점 더 확신하게 된다. 이는 산업농업 때문에 너무 경시되어 사실상 사라지다시피한 원칙이다. 아닌 게 아니라 지금은 농가 주민도 도시민과 다를 바 없이 슈퍼마켓을 이용하는 현실을, 산업농업이 제공해 주는 혜택인 양 홍보하고는 한다. 하지만 시장에 내다 팔 목적으로 생산하는 사람들은 주로 양적인 관심만 있는 반면, 자기가 생산한 것을 생존수단으로 이용하며 생활하는 사람들은 양뿐만 아니라 질에 대해서도 고심하리라고 해도 좋을 것이다.

5. 산업농업의 대약진은 농민이 이웃보다는 이웃의 농장을 갖는게 낫다는 확신을 갖게 되었을 때, 엄청난 돈을 기꺼이 그리고 부득이 빌리게 되었을 때 일어났다고 해도 좋을 것이다.

6. 소비경제는 무엇이든 찾아내거나 만들거나 기르기보다는 사는 게 낫다고 여기게 만드는 경제다. 광고는 사람들이 살 수 있는 게 다양하고 양도 많다는 사실을 자축해야한다고 암시한다. 쇼핑은 교통체증과 인파를 초래함에도 쉽고 편리한 것으로 인식된다. 돈을 쓰느 것은 위신을 세워주는 일이 된다. 유용한 목적을 위한 육체적 수고는 멸시당한다. 스포츠나 레크레이션에 힘쓰는 것은 인정받는 반면, 실질적인 일에 몸을 쓰는 것은 체면이 깍이는 것으로 여겨진다.

12. 미분

이 절에서는 미분을 정의하고, 미분법의 여러 기본법칙을 알아본다.

0. 바탕내용

바탕 1. 극한의 정의

바탕 2. 상수 c 와 함수$f,\ g\ :\ E \to \mathbb{R},\ a \in E'$에서 극한값 $\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x)$ 이 각각 존재하면 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x\to a}(f(x)+c\,g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + c\lim_{x\to a} g(x)$

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0, \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$)

바탕 3. 두 함수 $f\ :\ E \to F,\ g\ :\ F \to \mathbb{R}$에서 f 가 $x=a$ 에서 연속, g 가 $x=f(a)$ 에서 연속이면 $h=g\circ f$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

바탕 4. 정의역이 구간 I인 함수 f 가 순증가 또는 순감소이고 $x=a$ 에서 연속이면 f 의 역함수 f^{-1} 는 $b=f(a)$ 에서 연속이다.

기호. 이 단원에서 I는 구간을 나타낸다.

1. 정 의. 함수 $f : I \to \mathbb{R}$와 $a \in I$에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) 극한

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

가 존재하면 f는 $x = a$에서 미분가능(differentiabke at a)하다 하고, $f'(a)$를 $x = a$에서 f의 미분계수라고 한다.

(2) f가 I에 속하는 모든 점에서 미분가능하면 f는 I에서 미분가능하다고 한다.

(3) f가 $x = a$에서 미분가능하지 않으면 f는 I에서 미분불가능하다고 한다.

(4) f가 I에서 미분가능할 때,

$$f' : I \to \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

를 f의 도함수(derivative of f)라고 한다.

(5) f'이 미분가능하면 f'의 도함수를 f의 2차도함수라고 하고 f''로 나타낸다.

(6) 이렇게 계속하여 n차 도함수 $f^{(n)}$을 정의한다.

2. 보 기. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(x) = x \sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$은

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ 이 존재하지 않으므로 $x = 0$에서 미분불가능하다.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$은 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ 이므로 $x = 0$에서 미분가능하고 $f'(0) = 0$이다.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 가 유리수} \\ 0, & x \text{ 가 무리수} \end{cases}$는 $\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq \lim_{x \to 0} |x| = 0$이므로 $x = 0$에서 미분가능하고 $f'(0) = 0$이다.

3. 정 리. 함수 $f : I \to \mathbb{R}$가 $x = a$에서 미분가능하면 f는 $x = a$에서 연속이다.

증 명

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) - f(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

이므로 f는 $x = a$에서 연속이다.

미분의 정의와 바탕2에 의해 다음이 성립한다.

4. 정 리. 두 함수 $f,\ g\ :\ I \to \mathbb{R}$가 $x=a$에서 모두 미분가능하고 $c\in\mathbb{R}$이면 함수

$$cf+g,\ fg,\ \frac{f}{g}\ (g(a)\neq 0)$$

도 $x=a$ 에서 미분가능하고 다음이 성립한다.

(1) $(cf+g)'(a)=cf'(a)+g'(a)$

(2) $(f\cdot g)'(a)=f(a)\cdot g'(a)+f'(a)\cdot g(a)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{g(a)f'(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

5. 정 리. 두 함수 $f,\ g\ :\ I \to \mathbb{R}$가 모두 $n\in\mathbb{N}$ 번 미분가능하면 함수 $h(x)=f(x)g(x)$도 n 번 미분가능하고 $h^{(n)}(x)=\sum_{l=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_l\, f^{(l)}(x)\, g^{(n-l)}(x)$이다.

증 명 수학적 귀납법으로 증명한다.

[1] $n=0$일 때 성립한다.

[2] $n=k$일 때 성립하면 $h^{(k)}(x)=\sum_{l=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_l\, f^{(l)}(x)\, g^{(k-l)}(x)$이다.

이 식의 양변을 미분하면

$$h^{(k+1)}(x)=\sum_{l=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_l\, f^{(l)}(x)\, g^{(k+1-l)}(x)+\sum_{l=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_l\, f^{(l+1)}(x)\, g^{(k-l)}(x)$$

이고

$$\sum_{l=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_l\, f^{(l+1)}(x)\, g^{(k-l)}(x)=\sum_{l=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{l-1}\, f^{(l)}(x)\, g^{(k+1-l)}(x),\ \ {}_k\mathrm{C}_l+{}_k\mathrm{C}_{l-1}={}_{k+1}\mathrm{C}_l$$

이므로

$$h^{(k+1)}(x)=\sum_{l=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_l\, f^{(l)}(x)\, g^{(k+1-l)}(x)$$

이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 성립한다.

6. 연쇄법칙(Chain rule). 함수 $f : I \to \mathbb{R}$와 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에서, f가 $x=a$에서 미분가능하고 g가 $x=b=f(a)$에서 미분가능하면 f 와 g의 합성함수 $h=g\circ f$ 도 $x=a$에서 미분가능하고 $h'(a)=g'(f(a))f'(a)$ 이다.

증 명 함수 $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$G(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}, & y\neq b\\ g'(b), & y=b\end{cases}$$

로 정의하면 g 가 b 에서 미분가능하므로 G 는 b 에서 연속이고

$$g(y)-g(b)=G(y)(y-b)$$

이다. 따라서 $h=g\circ f$라고 하면

$$h(x)-h(a)=g(f(x))-g(f(a))=G(f(x))(f(x)-f(a))$$

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=G(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이다. 이제 G 는 b 에서 연속이고 f 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\to a}G(f(x))=G(\lim_{x\to a}f(a))=G(b)=g'(b)$$

이다. 따라서

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}G(f(x))\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g(f(a))\cdot f'(a)$$

7. 주. $f(0)=0,\ f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$은 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(f(x))-g(f(0))}{f(x)-f(0)}$을 생각할 수 없다.

따라서

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이고

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}=g'(f(a)),\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

이므로 h도 a에서 미분가능하고 $h'(a)=g'(f(a))f'(a)$라고 증명하는 것은 옳지 않다.

8. 역함수의 미분법. 함수 $f : I \to \mathbb{R}$의 역함수가 존재하고, $f'(a) \neq 0$ 이면 f 의 역함수 f^{-1} 는 $x = f(a)$에서 미분가능하고

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

증 명1 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선$y = x$에 대해 대칭이다. 따라서 점 $(a, f(a))$에서 곡선 $y = f(x)$의 접선의 기울기가 $f'(a)$이므로 $f'(a) \neq 0$ 이면 점 $(f(a), a)$에서 곡선 $y = f^{-1}(x)$의 접선의 기울기는 $\frac{1}{f'(a)}$ 이다.

따라서 f^{-1} 는 점 $(f(a), a)$에서 미분가능하고 $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ 이다.

증 명2 바탕 4에 의해 f^{-1} 가 $x = b$ 에서 연속이므로

$$y \to f(a) \text{ 이면 } f^{-1}(y) \to f^{-1}(f(a)) = a$$

이다. 따라서

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{f^{-1}(y) \to a} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

9. 보 기. (1) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$는 $f'(x) = f(x) > 0$이므로 역함수 $g(x) = \ln x$가 존재하고 $g(x) = \ln x$가 미분가능하다. $x = f(g(x))$에서 양변을 미분하면

$$1 = f'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = xg'(x)$$

이므로 $g'(x) = \frac{1}{x}$ 이다.

(2) 함수 $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$, $f(x) = \sin x$는

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - (f(x))^2} > 0$$

이므로 역함수 $g(x) = \arcsin x$가 존재하고 미분가능하다. $x = f(g(x))$에서 양변을 미분하면

$$1 = f'(g(x))g'(x) = \sqrt{1 - x^2}\, g'(x)$$

이므로 $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 이다.

(3) 함수 $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ 는 $f'(x) = \sec^2 x = 1 + \{f(x)\}^2 > 0$이므로 역함수 $g(x) = \arctan x$가 존재하고 미분가능하다. $x = f(g(x))$에서 양변을 미분하면

$$1 = f'(g(x))g'(x) = (1 + x^2)g'(x)$$

이므로 $g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ 이다.

핵심내용

1. 미분의 정의

2. 함수 $f : I \to \mathbb{R}$가 $x=a$에서 미분가능하면 f는 $x=a$에서 연속이다.

3. 두 함수 $f, g : I \to \mathbb{R}$가 $x=a$에서 모두 미분가능하고 $c \in \mathbb{R}$이면 함수

$$cf+g,\ fg,\ \frac{f}{g}\ (g(a)\neq 0)$$

도 $x=a$ 에서 미분가능하고 다음이 성립한다.

(1) $(cf+g)'(a)=cf'(a)+g'(a)$

(2) $(f\cdot g)'(a)=f(a)\cdot g'(a)+f'(a)\cdot g(a)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{g(a)f'(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

4. 두 함수 $f, g : I \to \mathbb{R}$가 모두 $n \in \mathbb{N}$ 번 미분가능하면 함수 $h(x)=f(x)g(x)$도 n 번 미분가능하고 $h^{(n)}(x)=\sum_{l=0}^{n} {}_nC_l\, f^{(l)}(x)\, g^{(n-l)}(x)$이다.

5. 연쇄법칙(Chain rule). 함수 $f : I \to \mathbb{R}$와 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에서, f가 $x=a$ 에서 미분가능하고 g가 $x=b=f(a)$ 에서 미분가능하면 f 와 g의 합성함수 $h=g\circ f$ 도 $x=a$ 에서 미분가능하고 $h'(a)=g'(f(a))f'(a)$ 이다.

6. 역함수의 미분법. 함수 $f : I \to \mathbb{R}$의 역함수가 존재하고, $f'(a)\neq 0$ 이면 f 의 역함수 f^{-1}는 $x=f(a)$에서 미분가능하고

$$(f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$$

연습문제

1. 다음 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 미분하라.

(1) $f(x) = x|x|$ (2) $f(x) = |x|^3$

2. 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대해 $|f(x)| \le |x|^c$인 함수 f가 $x = 0$에서 미분가능하기 위한 c의 값을 구하라.

3. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $f(0) = 0,\ x \neq 0$일 때 다음과 같다. $x = 0$에서 미분가능한가?

(1) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ (2) $f(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$

(3) $f(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ (4) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x^2}$

4. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^n, & x\text{가 유리수} \\ 0, & x\text{가 무리수} \end{cases}$가 $x = 0$에서 미분가능한 $n \in \mathbb{N}$을 구하라.

5. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $x = 0$에서 미분가능하고 $f(0) = 0$일 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow g(x) = |f(x)|\text{가 } x = 0 \text{에서 미분가능하다.}$$

6. 함수 $f : (0, \pi) \to (-1, 1),\ f(x) = \cos x$의 역함수를 g라 할 때, $g'(x)$를 구하라.

7. 함수 $f(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하고, $f(x) = f(0)$인 x가 0 근방에 무수히 많으면 $f'(0) = 0$임을 보여라.

8. 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 가 $x = c$ (단, $a < c < b$)에서 미분가능하면 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 다음을 만족시키는 $\delta > 0$ 가 존재함을 보여라.

$$|x-y| < \delta,\ a \le x < c < y \le b \text{ 이면 } \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(c) \right| < \epsilon$$

9. 두 함수 $f,\ g : I \to \mathbb{R}$가 $f(-x) = -f(x),\ g(-x) = g(x)$를 만족시키고 $2n$번 미분가능하다.

(1) $f'(-x) = f'(x)$이고 $g'(-x) = -g'(x)$임을 보여라.

(2) $f^{2n}(0) = g^{2n-1}(0) = 0$임을 보여라.

10. $f(x) = \sec x$에 대해 $a_n = f^{(n)}(0)$이라 하자.

(1) $a_{2n-1} = 0$임을 보여라.

(2) $a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8$의 값을 구하라.

(3) $a_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\, a_{2k}(-1)^{n+k+1}$임을 보여라.

11. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$에 대해 $a_n = f^{(n)}(0)$이라 하자.

(1) $a_{2n-1} = 0$임을 보여라.

(2) $a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8$의 값을 구하라.

(3) $a_{2n} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k}\, a_{2k}(-1)^{n-k+1}$임을 보여라.

12. $f(x) = \tan x$에 대해 $a_n = f^{(n)}(0)$이라 하자.

(1) $a_{2n} = 0$임을 보여라.

(2) $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9$의 값을 구하라.

(3) $\sum_{k=0}^{n} {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k+1} a_{2k+1}(-1)^k = 1$임을 보여라.

(4) $a_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1} a_{2k-1} a_{2n+1-2k}$ 임을 보여라.

13. 두 자연수 m과 n에 대해 정의역이 R인 연속함수 f가 $f(x) = x^m \sin\frac{1}{x^n} (x \neq 0)$이다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하기 위한 m과 n의 조건을 구하라.

(2) $f'(x)$가 $x = 0$에서 연속이기 위한 m과 n의 조건을 구하라.

14. $f^{(5)}(x)$가 존재하고, $f'(x) > 0$인 함수 $y = f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

(1) $g^{(5)}(x)$가 존재함을 보여라.

(2) $g^{(5)}(x)$를 $f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x),\ f^{(5)}(x)$를 사용하여 나타내라.

읽을거리

행복의 비결

법정 스님

세상과 타협하는 일보다 더 경계해야 할 일은
자기 자신과 타협하는 일이다.
스스로 자신의 매서운 스승 노릇을 해야 한다.

우리가 일단 어딘가에 집착해 그것이 전부인 것처럼 안주하면
그 웅덩이에 갇히고 만다.
그러면 마치 고여 있는 물처럼 썩기 마련이다.

버리고 떠난다는 것은 곧 자기답게 사는 것이다.
자기답게 거듭거듭 시작하며 사는 일이다.
낡은 탈로부터, 낡은 울타리로부터,
낡은 생각으로부터 벗어나야 새롭게 시작할 수 있다.

아무리 가난해도 마음이 있는 한 나눌 것은 있다.
근원적인 마음을 나눌 때
물질적인 것은 자연히 그림자처럼 따라온다.

그렇게 함으로써 내 자신이 더 풍요로워질 수 있다.
세속적인 계산법으로는 나눠 가질수록
내 잔고가 줄어들 것 같지만
출세간적인 입장에서는 나눌수록 더 풍요로워진다.

물질적인 풍요 속에서는 사람이 타락하기 쉽다.
그러나 맑은 가난은 우리에게
마음의 평안을 가져다주고 올바른 정신을 지니게 한다.

행복의 비결은 필요한 것을 얼마나 갖고 있는가가 아니라
불필요한 것에서 얼마나 자유로워져 있는가에 있다.
'위에 견주면 모자라고
아래에 견주면 남는다'는 말이 있듯
행복을 찾는 오묘한 방법은 내 안에 있다.

하나가 필요할 때는 하나만 가져야지 둘을 갖게 되면
애초의 그 하나마저도 잃게 된다.
그리고 인간을 제한하는 소유물에 사로잡히면
소유의 비좁은 골방에 갇혀 정신의 문이 열리지 않는다.
작은 것과 적은 것에 만족할 줄 알아야 한다.
그것이 청빈의 덕이다.

우주의 기운은 자력과 같아서,
우리가 일단 어두운 마음을 지니고 있으면
어두운 기운이 몰려온다고 한다.
그러나 밝은 마음을 지니고 긍정적이고 낙관적으로 살면

밝은 기운이 밀려와 우리의 삶을 밝게 비춘다.

13. 평균값정리

이 절에서는 Cauchy평균값정리, Darboux정리에 대해 알아본다.

0. 바탕내용

바탕 1. 미분의 정의

1. 정 의. 정의역이 구간 I인 함수 f와 $a\in I$에 대해 다음과 같이 정의한다.
(1) $x\in(a-\delta, a+\delta)\cap I$이면 $f(x)\le f(a)$인 양수 δ가 존재하면 f는 $x=a$에서 극댓값(local maximum)을 가진다고 한다.
(2) $x\in(a-\delta, a+\delta)\cap I$이면 $f(x)\ge f(a)$인 양수 δ가 존재하면 f는 $x=a$에서 극솟값(local minimum)을 가진다고 한다.
(3) f가 $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 가지면, 극값(relative extremum)을 가진다고 한다.

2. 정 리(Fermat). 함수 $f : [a, b]\to\mathbb{R}$가 $x=c\in(a, b)$ 에서 극값을 갖고 미분가능하면 $f'(c)=0$ 이다.
증 명 f 가 $x=c$ 에서 극댓값을 갖는 경우를 증명한다.
정의에 의해 $x\in(c-\delta, c+\delta)\cap[a, b]$ 이면 $f(x)\le f(c)$ 인 $\delta>0$ 와 $f'(c)$ 가 존재하므로

$$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0,\quad f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$$

이다. 따라서 $f'(c)=0$이다. f가 c에서 극솟값을 가지면, $-f$ 는 c 에서 극댓값을 가진다. 따라서 $(-f)'(c)=0$이므로 $f'(c)=0$이다.

3. 정 리(Rolle). 연속함수$f : [a, b]\to\mathbb{R}$가 (a, b) 에서 미분가능하고, $f(a)=f(b)$ 이면

$$f'(c)=0$$

인 $c\in(a, b)$가 존재한다.

증 명 f 가 $[a, b]$ 에서 연속이므로 모든 $x\in[a, b]$에 대해

$$f(c)\le f(x)\le f(d)$$

인 $c,\ d\in[a, b]$가 존재한다.
$\{a, b\}=\{c, d\}$ 이면 f 는 상수함수이므로 $f'\equiv 0$ 이다.
$\{a, b\}\neq\{c, d\}$ 이면 $a<c<b$ 또는 $a<d<b$ 이다. $a<c<b$ 이면 페르마의 정리에 의해 $f'(c)=0$ 이고, $a<d<b$ 이면 페르마의 정리에 의해$f'(d)=0$ 이다.
따라서 어느 경우든 $f'(c)=0$ 인 $c\in(a, b)$가 존재한다.

4. Cauchy평균값정리. 연속함수 $f,\ g\ :\ [a,\ b]\ \rightarrow\ \mathbb{R}$가 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$[f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)$$

인 $c\in(a,\ b)$가 존재한다.

증 명 새로운 함수 $h\ :\ [a,\ b]\ \rightarrow\ \mathbb{R}$를

$$h(x)=[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)]-[g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$$

로 정의하면 h는 $[a,\ b]$에서 연속이고, $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)$이다.
따라서 Rolle정리에 의해

$$h'((c)=0\ \text{즉,}\ [f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)$$

인 $c\in(a,\ b)$가 존재한다.

특히 $g(x)=x$이면 위 정리는 다음과 같다.

5. 평균값정리. 연속함수 $f\ :\ [a,\ b]\ \rightarrow\ \mathbb{R}$가 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

인 $c\in(a,\ b)$가 존재한다.

6. 정 리. 연속함수 $f\ :\ [a,\ b]\ \rightarrow\ \mathbb{R}$가 $(a,\ b)$에서 미분가능하고 모든 $x\in(a,\ b)$에 대해
(1) $f'(x)=0$이면 f는 상수함수이다.
(2) $f'(x)\geq 0$이면 f 는 증가함수이다.
(3) $f'(x)\ >\ 0$이면 f는 순증가함수이다.
(4) $f'(x)\leq 0$이면 f는 감소함수이다.
(5) $f'(x)\ <\ 0$이면 f는 순감소함수이다.

증 명 f 가 평균값정리의 가정을 만족시키므로 임의의 $c,\ d\in[a,\ b]$에 대해

$$f(d)-f(c)=f'(x)(d-c)$$

인 $x\in(c,\ d)$가 존재한다. 따라서 정리가 성립한다.

7. 주. (1) 위 정리에서 (1), (2), (4)는 역도 성립하지만 (3), (5)는 역이 성립하지 않는다.
$f(x)=x^3$ 은 순증가함수이지만 $f'(x)>0$ 이 아니다.
(2) 함수 $f(x)=x+2x^2\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0),\ f(0)=0$ 은 $f'(0)=1$ 이고 자연수 n 에 대해 $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-1$ 이다. 따라서$f'(0)\ >0$ 이지만 0 의 어떤 근방에서도 일대일이 아니다.

8. 보 기. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 모든 $x, y \in R$에 대해 $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$ 이면

$$\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \le \lim_{y\to x}|y-x| = 0$$

이므로 f는 상수함수이다.

9. 정 리(Darboux). 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 미분가능하고 $f'(a) < k < f'(b)$이면

$$f'(c) = k$$

인 $c \in (a, b)$가 존재한다.

증 명 방법1. $g : [a, b] \to \mathbb{R}$를 $g(x) = f(x) - kx$로 정의하면 g 는 연속이고 미분가능하다. 따라서 g는 $[a, b]$에서 최솟값 $g(c)$ 를 갖는다. 이때

$$g'(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) - k < 0$$

이므로 $g(a)$는 최솟값이 아니다. 또

$$g'(b) = \lim_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b} = f'(b) - k > 0$$

이므로 $g(b)$ 도 최솟값이 아니다. 즉, $a < c < b$이다. 따라서 페르마의 정리에 의해

$$g'(c) = 0 \text{ 즉, } f'(c) = k$$

이다.

방법2. $m = \frac{a+b}{2}$로 놓고, $[a, b]$에서

$$\alpha(t) = \begin{cases} a, & a \le t \le m \\ 2t-b, & m \le t \le b' \end{cases} \quad \beta(t) = \begin{cases} 2t-a, & a \le t \le m \\ b, & m \le t \le b \end{cases}$$

라 하고, (a, b)에서 $g(t) = \frac{f(\beta(t))-f(\alpha(t))}{\beta(t)-\alpha(t)}$, $g(a) = f'(a)$, $g(b) = f'(b)$라고 하자. 이때

$$\beta(t)-\alpha(t) = \begin{cases} 2(t-a), & a \le t \le m \\ 2(b-t), & m \le t \le b' \end{cases} \quad \lim_{t\to a+} g(t) = \lim_{t\to a+}\frac{f(2t-a)-f(a)}{2(t-a)} = f'(a), \quad \lim_{t\to b-} g(t) = f'(b)$$

이므로 g는 $[a, b]$에서 연속이다. 따라서 사이값정리에 의해 $g(t_0) = k$인 $t_0 \in [a, b]$가 존재한다. 한편 평균값정리에 의해 $g(t_0) = \frac{f(\beta(t_0))-f(\alpha(t_0))}{\beta(t_0)-\alpha(t_0)} = f'(c)$인 c가 $\alpha(t_0)$와 $\beta(t_0)$사이에 존재한다.

10. 보 기. $g : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 2, & x \ge 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$는 $g(x) = 1$ 인 $x \in [1, 3]$ 가 존재하지 않으므로 $f' = g$ 인 미분가능한 함수 f 는 존재하지 않는다.

11. 정 리. 양수 m과 실수 a에 대해 $x_n=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n+a}$라 하면 다음이 성립한다.

(1) $m\le 2a$이면 모든 자연수 n에 대해 $x_n>x_{n+1}$이다.

(2) $x_k\le x_{k+1}$이면 $n\ge k+1$에 대해 $x_n<x_{n+1}$이다.

증 명 $x>0$에 대해 $f(x)=(x+a)\ln\frac{x+m}{x}$라 하면 다음이 성립한다.

[1] $f'(x)=\ln(x+m)-\ln x+(x+a)\left(\frac{1}{x+m}-\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$

[2] $f''(x)=(x+a)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+m)^2}\right)+2\left(\frac{1}{x+m}-\frac{1}{x}\right)=\frac{(2a-m)x+ma}{x^2(x+m)^2}$

(1) $m\le 2a$이면 $f''(x)\ge 0$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$이므로 $f'(x)<0$이다.

따라서 $f(x)$가 감소함수이므로 $f(n)>f(n+1)$, $x_n>x_{n+1}$이다.

(2) $x_k\le x_{k+1}$이면 (1)에 의해 $m>2a$이다.

A. $a\le 0$인 경우; $f''(x)\le 0$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$이므로 $f'(x)>0$이다.

따라서 $f(x)$가 증가함수이므로 $f(n)<f(n+1)$, $x_n<x_{n+1}$이다.

B. $a>0$인 경우; $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$이고, $f'(x)$가 $x<\frac{ma}{m-2a}$에서 증가, $x>\frac{ma}{m-2a}$에서 감소하므로 방정식 $f'(x)=0$은 유일한 해를 가진다. 이 해를 α라고 하면 $x<\alpha$에서 감소, $x>\alpha$에서 증가이고 $x_k\le x_{k+1}$이므로 $\alpha\le x_k$ 또는 $x_k\le\alpha<x_{k+1}$이다.
따라서 $x_k\le x_{k+1}$이면 $n\ge k+1$에 대해 $f(n)<f(n+1)$, $x_n<x_{n+1}$이다.

특히 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+1}\uparrow e^3$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}\downarrow e^2$이다.

핵심내용

1. 페르마의 정리, Rolle정리, Cauchy평균값정리, 평균값정리, Darboux정리

2. 양수 m과 실수 a에 대해 $x_n=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n+a}$라 하면 다음이 성립한다.

(1) $m\le 2a$이면 모든 자연수 n에 대해 $x_n>x_{n+1}$이다.

(2) $x_k\le x_{k+1}$이면 $n\ge k+1$에 대해 $x_n<x_{n+1}$이다.

연습문제

1. 평균값정리를 이용하여 다음을 보여라.

(1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ (2) $x>0$일 때, $\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$

2. 미분가능한 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 모든 $a<x<b$에 대해 $f'(x)\neq 0$ 이다.
(1) f는 일대일임을 보여라.
(2) $f'(a)=1$ 이면 모든 $a<x<b$에 대해$f'(x)>0$ 임을 보여라.

3. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 연속이고 $(0,1)$에서 미분가능하지만 f' 는 $(0,1)$에서 유계가 아닌 f를 하나 구하라.

4. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 미분가능하고 $f'(0)=2$이면 f가 $(-a,a)$에서 증가함수가 되는 $a>0$이 존재하는가?

5. 연속함수 $f:[0,2]\to\mathbb{R}$가 $(0,2)$에서 미분가능하고 $f(0)=0,\ f(1)=f(2)=3$이다.
(1) $f'(c_1)=3$인 $c_1\in(0,1)$가 존재함을 보여라.
(2) $f'(c_2)=0$ 인 $c_2\in(1,2)$가 존재함을 보여라.
(3) $f'(c_3)=1$인 $c_3\in(0,2)$가 존재함을 보여라.

6. 상수 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$과 $b_1<b_2<\cdots<b_n$인 자연수 b_k에 대해 다음이 성립함을 보여라.

(1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}=0$이면 방정식 $\sum_{k=0}^{n}a_k x^k=0$ 은 구간 $(0,1)$에서 해를 가진다.

(2) $\sum_{k=1}^{n}a_k=m$이면 방정식 $\sum_{k=1}^{n}ka_k x^{k-1}=m$은 구간 $(0,1)$에서 해를 가진다.

(3) $\sum_{k=1}^{n}a_k=0$이면 방정식 $\sum_{k=1}^{n}b_k a_k x^{b_k-b_1}=0$은 구간 $(0,1)$에서 해를 가진다.

7. 자연수 n과 $1\le i\le n$에 대해 $0<x_i<\pi,\ \lambda_i>0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$이면 다음이 성립함을 보여라.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sin x_i\le\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)$$

8. $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+a}$가 $x_n\uparrow$이기위한 실수 a의 범위를 구하라.

☆9. 함수 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$가 미분가능, $h>0,\ \lim_{x\to\infty}f'(x)=a$일 때, 다음이 성립함을 보여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a$ (2) $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$(상수)이면 $a=0$ (3) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

읽을거리

자기 자신답게 살라

법정 스님

어떤 사람이 불안과 슬픔에 빠져 있다면
그는 이미 지나가버린 과거의 시간에
아직도 매달려 있는 것이다.

또 누가 미래를 두려워하면서 잠 못 이룬다면
그는 아직 오지도 않은 시간을
가불해서 쓰고 있는 것이다.

과거나 미래 쪽에 한눈을 팔면
현재의 삶이 소멸해 버린다.
보다 직설적으로 표현하면
과거도 없고 미래도 없다.
항상 현재일 뿐이다.

지금 이 자리에서 최선을 다해
최대한으로 살 수 있다면
여기에는 삶과 죽음의 두려움도 발붙일 수 없다.

저마다 서 있는 자리에서 자기 자신답게 살라.

14. L'Hospital법칙

이 절에서는 여러 형태의 L'Hospital법칙에 대해 알아본다.

0. 바탕내용

바탕 1. Cauchy평균값정리. 연속함수 $f,\ g\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$가 (a,b)에서 미분가능하면

$$[f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)$$

인 $c\in(a,b)$가 존재한다.

바탕 2. 함수 $f:E\to\mathbb{R}$, $a\in E'$, $a_n\in E$, $a_n\neq a$, $-\infty\le l\le\infty$에 대해 다음은 서로 동치이다.

(1) $x=a$에서 f의 극한이 존재하고 $\lim_{x\to a}f(x)=l$이다.

(2) $a_n\to a$이면 $f(a_n)\to l$이다.

1. 정 리. $a\le c\le b$이다. 두 연속함수 $f,\ g\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$가 $(a,b)-\{c\}$에서 미분가능하고

(i) $f(c)=g(c)=0$ (ii) 모든 $x\in(a,b)-\{c\}$에 대해 $g(x)\neq 0\neq g'(x)$

이면 $-\infty\le l\le\infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\text{이면 }\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

증 명 바탕 2에 의해 $a_n\to c$, $a_n\in[a,b]-\{c\}$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=l$ 임을 보이면 된다.

Cauchy평균값정리에 의해

$$\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{f(a_n)-f(c)}{g(a_n)-g(c)}=\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)}$$

인 x_n이 a_n과 c사이에 존재한다. 따라서

$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ 이면 바탕 2에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)}=l$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=l$ 이므로 바탕 2에 의해 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ 이다.

정 리 1에서 $c=a$이면 오른쪽 극한, $c=b$이면 왼쪽 극한에 대한 성질이다.
이것을 다시 쓰면 다음과 같다.

2. 따름정리. 두 연속함수 $f,\ g\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$가 (a,b)에서 미분가능하고
(i) $f(a)=g(a)=0$ (ii) 모든 $x\in(a,b)$ 에 대해 $g(x)\neq 0\neq g'(x)$
이면 $-\infty\le l\le\infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\text{이면 }\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

3. 따름정리. 두 연속함수 $f,\ g\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$가 (a,b)에서 미분가능하고
(i) $f(b)=g(b)=0$ (ii) 모든 $x\in(a,b)$에 대해 $g(x)\neq 0\neq g'(x)$
이면 $-\infty\le l\le\infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\text{ 이면 }\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

4. 주 : 함수 $f,\ g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 각각 $f(0),\ x\neq 0$이면 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\quad g(x)=\sin x$이면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\text{이지만 }\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{가 존재하지 않는다.}$$

극한 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$이 존재한다고 하여 극한 $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$이 항상 존재하는 것은 아니다.

5. 보 기. (1) $f(x)=\sin x,\ g(x)=\sqrt{x},\ a=0$라 하면 $f,\ g$는 따름정리 2의 조건을 만족시키고, $\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$이므로 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$이다.

(2) $f(x)=1-\cos x,\ g(x)=x^2,\ c=0$이라 하면 $f,\ g$는 정 리 1의 조건을 만족시키므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}\text{임을 보이면 }\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

이다. 그런데 f', g'도 정 리 1의 조건을 만족시키고,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}$이다.

(3) $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x-x}{x\sin x}$이다.
$f(x)=\sin x-x,\ g(x)=x\sin x$라 하면 $f,\ g$는 정 리 1의 조건을 만족시키므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0\text{임을 보이면 }\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0$$

이다. 그런데, f', g'도 정 리 1의 조건을 만족시키고,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=0\text{이므로 }\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$$

6. 정 리. $a>0$이다. 미분가능한 두 함수 $f,\ g\ :\ [a,\ \infty)\ \rightarrow\ \mathbb{R}$에서

(i) $\lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=\lim_{x\rightarrow\infty} g(x)=0$ (ii) 모든 $x\in(a,\ \infty)$에 대해 $g(x)\neq 0\neq g'(x)$

이면 $-\infty\leq l\leq\infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \text{ 이면 } \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

증 명 $F(0)=G(0)=0,\ 0<x<\frac{1}{a}$에 대해 $F(x)=f\left(\frac{1}{x}\right),\ G(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$라고 하면 다음이 성립한다.

[1] $G'(x)=-g'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$이므로 모든 $0<x\leq\frac{1}{a}$에 대해 $G(x)\neq 0\neq G'(x)$이다.

[2] $F'(x)=-f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$이므로 $\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$이다.

따라서 따름정리 2에 의해 $\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{F(x)}{G(x)}=l$이므로 $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{F(x)}{G(x)}=l$이다.

7. 정 리. $a<0$이다. 미분가능한 두 함수 $f,\ g\ :\ [a,\ \infty)\ \rightarrow\ \mathbb{R}$에서

(i) $\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=\lim_{x\rightarrow-\infty} g(x)=0$ (ii) 모든 $x\in(-\infty,\ a)$ 에 대해 $g(x)\neq 0\neq g'(x)$

이면 $-\infty\leq l\leq\infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \text{ 이면 } \lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

증 명 $f_1(x)=f(-x),\ g_1(x)=g(-x)$에 대해 정 리 6을 적용한다.

8. 보조정리. 두 수열 $<a_n>$, $<b_n>$ 및 상수 a와 어떤 자연수 n에 대해서도 $b_n \neq b$인 상수 b에 대해 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a}{b_n - b} = l$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$이다.

증 명 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{b_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{b_n - b} = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a}{b_n - b} = l$이므로

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(a_n - a) + a}{(b_n - b) + b} = \frac{\frac{a_n - a}{b_n - b} + \frac{a}{b_n - b}}{1 + \frac{b}{b_n - b}} \quad \to \frac{l + 0}{1 + 0} = l$$

9. 정 리. 미분가능한 두 함수 $f,\ g\ :\ (a,\ b)\ \to\ \mathbb{R}$에서

(i) $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$ (ii) 모든 $x \in (a,\ b)$ 에 대해 $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$

이면 $-\infty \leq l \leq \infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ 이면 } \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

증 명 바탕 2에 의해 $a_n \to a,\ a_n \in (a,\ b)$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = l$ 임을 보이면 된다.

$l \in R$인 경우, $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ 이므로

주어진 $\epsilon > 0$에 대해 $a < x < a + \delta$이면 $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \epsilon$

인 $\delta > 0$가 존재한다. $a_n \to a$이므로 $n \geq k$이면 $a < a_n < a + \delta$인 자연수 k가 존재한다.
이제 어떤 자연수 n에 대해서도 $a_n \neq c$인 상수 $a < c < a + \delta$를 택하자.
Cauchy평균값정리에 의해

$$\frac{f(a_n) - f(c)}{g(a_n) - g(c)} = \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)}$$

인 x_n이 a_n과 c사이에 존재한다. 이때 $n \geq k$이면 $a < x_n < a + \delta$이므로

$$\left| \frac{f(a_n) - f(c)}{g(a_n) - g(c)} - l \right| = \left| \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} - l \right| < \epsilon$$

이다. 즉, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(c)}{g(a_n) - g(c)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = l$ 이다.

또 $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \infty$이다. 따라서 보조정리 8에 의해 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = l$ 이다.
$l = \pm\infty$인 경우도 같은 방법으로 보인다.

10. 정 리. 미분가능한 두 함수 $f,\ g\ :\ (a,\ b)\ \rightarrow\ \mathbb{R}$에서

(i) $\lim_{x\rightarrow b^-} g(x)=\infty$ (ii) 모든 $x\in(a,b)$ 에 대해 $g(x)\neq 0\neq g'(x)$

이면 $-\infty\leq l\leq\infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\rightarrow b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \text{ 이면 } \lim_{x\rightarrow b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

증 명 $f_1(x)=f(-x),\ g_1(x)=g(-x)$에 대해 정 리 9를 적용한다.

11. 정 리. $a>0$이다. 미분가능한 두 함수 $f,\ g\ :\ (a,\ \infty)\ \rightarrow\ R$에서

(i) $\lim_{x\rightarrow\infty} g(x)=\infty$ (ii) 모든 $x\in(a,\infty)$ 에 대해 $g(x)\neq 0\neq g'(x)$

이면 $-\infty\leq l\leq\infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \text{ 이면 } \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

증 명 $0<x<\frac{1}{a}$에 대해 $F(x)=f\left(\frac{1}{x}\right),\ G(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$라고 하면 다음이 성립한다.

[1] $\lim_{x\rightarrow 0^+} G(x)=\infty$

[2] $G'(x)=-g'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$이므로 모든 $0<x\leq\frac{1}{a}$에 대해 $G(x)\neq 0\neq G'(x)$이다.

[3] $F'(x)=-f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$이므로 $\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$이다.

따라서 정 리 9에 의해 $\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{F(x)}{G(x)}=l$이므로 $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{F(x)}{G(x)}=l$이다.

12. 정 리. 미분가능한 두 함수 $f,\ g\ :\ (-\infty,\ a)\ \rightarrow\ \mathbb{R}$에서

(i) $\lim_{x\rightarrow-\infty} g(x)=\infty$ (ii) 모든 $x\in(a,\infty)$ 에 대해 $g(x)\neq 0\neq g'(x)$

이면 $-\infty\leq l\leq\infty$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \text{ 이면 } \lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

증 명 $f_1(x)=f(-x),\ g_1(x)=g(-x)$에 대해 정 리 11을 적용한다.

핵심내용

1. L'Hospital법칙의 여러 형태

연습문제

1. 다음 극한을 구하라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$ (3) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x^3}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^3}$ (5) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{e^x}$ (6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\tan x}$ (8) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x)$ (9) $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$

(10) $\lim_{x\to 0^+} x^{2x}$ (11) $\lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$ (12) $\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x$

(13) $\lim_{x\to 0^+} x^{x^x}$ (14) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{x^x}}{x}$ (15) $\lim_{x\to 0^+} x^{x^{x^x}}$

2. 두 실수 a와 $b(\neq 0)$의 값을 각각 구하라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - a\cos x}{x^2} = b$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - a\sin x}{x^3} = b$ (3) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - a\arctan x}{x^3} = b$

3. 다음 극한이 존재하도록 하는 자연수 k의 최댓값을 각각 구하라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \tan x}{x^k}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \arctan x}{x^k}$ (3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \arctan x}{x^k}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x \cdot \arcsin x - \sin x \cdot \arctan x}{x^k}$ ☆(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + \arctan x - \sin x - \arcsin x}{x^k}$

4. 다음 극한을 구하라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x \cdot \arcsin x - \sin x \cdot \arctan x}{x(\sin x - x\cos x)}$ ☆(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + \arctan x - \sin x - \arcsin x}{x(\tan x \cdot \arcsin x - \sin x \cdot \arctan x)}$

5. 함수 $f,\ g\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$가 점 $c\,(a < c < b)$ 에서 미분가능하고, $f(c) = g(c) = 0$ 이다. 이 때 모든 $x \in (a, b)$ 에 대해 $g(x) \neq 0$ 이고 $g'(c) \neq 0$ 이면 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ 이 존재하고 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ 임을 보여라.

6. 다음 극한값이 0이 되도록 하는 차수가 가장 작은 다항식 $p(x)$를 각각 구하라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-p(x)}{x^5}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-p(x)}{x^5}$ (3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-p(x)}{x^5}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-p(x)}{x^5}$ (5) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-p(x)}{x^5}$ (6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\arcsin x-p(x)}{x^5}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\arctan x-p(x)}{x^5}$ (8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\arcsin x-p(x)}{x^5}$ (9) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\arctan x-p(x)}{x^5}$

7. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 미분가능하고 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$일 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $f'(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 이면 $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-2f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(2x)-f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(2f'(2x)-f'(x))$인가?

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-2f(x)}{x^2}=0$인가?

☆8. 두 실수 a, b와 미분가능한 함수 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$에 대해 $\lim_{x\to\infty}(f(x)+af'(x))=b$일 때, 다음 각 경우 $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ 인가?

(1) $a=1$ (2) $a>0$ (3) $a=0$ (4) $a=-1$

☆9. $0<a<b$, $0<p$이다. 함수 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) $a<f(x)<b$ 이면 $\lim_{x\to 0^+}x^{f(x)}=0$ 임을 보여라.

(2) $ax^p<f(x)<bx^p$ 이면 $\lim_{x\to 0^+}x^{f(x)}=1$ 임을 보여라.

(3) $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$ 이지만 $\lim_{x\to 0^+}x^{f(x)}\neq 1$ 인 f를 하나 구하라.

☆10. 함수 $f_1:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x$과 자연수 n에 대해 $f_{n+1}(x)=x^{f_n(x)}$일 때, 다음을 보여라.

(1) $\lim_{x\to 0^+}f_{2n-1}(x)=0$ (2) $\lim_{x\to 0^+}f_{2n}(x)=1$

말이 적은 사람

법정 스님

침묵을 소중히 여길 줄 아는 사람에게
신뢰가 간다.
초면이든 구면이든
말이 많은 사람한테는 신뢰가 가지 않는다.

나는 가끔 많은 사람들을 만나게 되는데
말수가 적은 사람한테는
오히려 내가 내 마음을 활짝 열어 보이고 싶어진다.

인간과 인간의 만남에서 말은 그렇게 중요하지 않다.
꼭 필요한 말만 할 수 있어야 한다.
안으로 말이 여물도록 인내하지 못하기 때문에
밖으로 쏟아 내고 마는 것이다.
이것은 하나의 습관이다.

생각이 떠오른다고 해서 불쑥 말해 버리면
안에서 여무는 것이 없다.
그렇기 때문에 그 내면은 비어 있다.
말의 의미가 안에서 여물도록
침묵의 여과기에서 걸러 받을 수 있어야 한다.

불교 경전은 말하고 있다.
입에 말이 적으면 어리석음이 지혜로 바뀐다고.
말하고 싶은 충동을 참을 수 있어야 한다.

생각을 전부 말해 버리면 말의 의미가,
말의 무게가 여물지 않는다.
말의 무게가 없는 언어는
상대방에게 메아리가 없다.

오늘날 인간의 말이 소음으로 전락한 것은
침묵을 배경으로 하지 않기 때문이다.
말이 소음과 다름없이 다루어지고 있기 때문이다.

우리들은 말을 안 해서 후회되는 일보다도
말을 해버렸기 때문에
후회되는 일이 얼마나 많은가.

침묵을 소중히 여길 줄 아는 사람에게
신뢰가 간다.

15. 평등연속

이 절에서는 평등연속을 정의하고, 연속과 평등연속의 차이를 알아본다.

0. 바탕내용

바탕 1. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$에서, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$|x-a| < \delta,\ x \in E \text{ 이면 } |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

인 양수$\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하면, 즉 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 이면 $x = a$에서 f는 연속이라 하고, f가 모든 점 $x \in E$에서 연속이면 f는 E에서 연속이라고 한다.

바탕 2(평균값정리). 연속함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 미분가능하면

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

인 $c \in (a, b)$가 존재한다.

바탕 3(Bolzano-Weierstrass 정리). 유계 수열은 수렴하는 부분수열을 가진다.

바탕 4. $x_n \not\to 0$ 이면 $\left|x_{n_k}\right| \geq \epsilon$인 부분수열 $< x_{n_k} >$와 $\epsilon > 0$이 존재한다.

1. 정 의. 집합 $A \subset \mathbb{R}$와 함수 $f : A \to \mathbb{R}$에 대해 다음과 같이 정의한다.

(1) 임의의 $\epsilon > 0$에 대해

$$|x-y| < \delta,\ x \in A,\ y \in A \text{이면 } |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하면 f는 평등연속(uniformly continuous)이라고 한다.

(2) $E \subset A$에 대해 $f|_E$가 평등연속이면 f는 E에서 평등연속이라고 한다.

2. 정 리. 두 함수 $f,\ g\ :\ A \to \mathbb{R}$가 평등연속이면 $f+g$도 평등연속이다.

증 명 주어진 $\epsilon > 0$에 대해

$$|x-y| < \delta,\ x \in A,\ y \in A\text{이면 } |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2}\text{이고 } |g(x)-g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

인 양수 δ가 존재한다. 따라서 $|x-y| < \delta,\ x \in A,\ y \in A$이면

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)-(f+g)(y)| &= |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| \\ &\le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \end{aligned}$$

이므로 $f+g$도 평등연속이다.

3. 정 리. 함수 $f\ :\ A \to B$가 평등연속이고, $g\ :\ B \to \mathbb{R}$가 평등연속이면 $h(x)=g(f(x))$는 A에서 평등연속이다.

증 명 주어진 $\epsilon > 0$에 대해 g가 평등연속이므로

$$|s-t| < \delta_1,\ s \in B,\ t \in B\text{이면 } |g(s)-g(t)| < \epsilon$$

인 양수 δ_1이 존재한다. 또 f가 평등연속이므로

$$|x-y| < \delta,\ x \in A,\ y \in A\text{이면 } |f(x)-f(y)| < \delta_1$$

인 양수 δ가 존재한다. 따라서 $|x-y| < \delta,\ x \in A,\ y \in A$이면 $|f(x)-f(y)| < \delta_1$이므로

$$|g(f(x))-g(f(y))| < \epsilon$$

이다. 그러므로 h는 A에서 평등연속이다.

4. 정 의. 집합 $A \subset \mathbb{R}$와 함수 $f\ :\ A \to \mathbb{R}$가 있다. 모든 $x, y \in A$에 대해

$$|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$$

인 양수 M이 존재하면 f를 Lipschitz 함수라고 한다.

5. 정 리. Lipschitz 함수 $f\ :\ A \to \mathbb{R}$는 평등연속이다.

증 명 모든 $x, y \in A$에 대해 $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$인 양수 M이 존재한다.

임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $\delta = \frac{\epsilon}{M}$로 놓자.

이때 $|x-y| < \delta,\ x, y \in A$이면 $|f(x)-f(y)| < \epsilon$이므로 f는 평등연속이다.

구간 I가 $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) 중 어느 하나일 때, $I^o = (a, b)$라고 하자.

6. 정 리. 연속함수 $f : I \to \mathbb{R}$가 I^o에서 미분가능하고, f'이 유계이면 f는 평등연속이다.

증 명 모든 $x \in I$에 대하여 $|f'(x)| \le M$이이라고 하자.
평균값정리에 의해 임의의 $c,\ d \in I$에 대하여

$$f(d) - f(c) = f'(x)(d - c)$$

인 $x \in (c, d)$가 존재한다.
따라서 $|f(d) - f(c)| \le M|d - c|$이므로 정 리 5에 의해 f는 평등연속이다.

7. 보 기. (1) $f : A \to \mathbb{R}$가 평등연속이고 $E \subset A$이면 f는 E에서도 평등연속이다.
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$는 $f'(x) = 2$이므로 평등연속이다.
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$는 $|f'(x)| \le 1$이므로 평등연속이다.
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$에서 $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$,
$f'(0) = 0$이다. 따라서 $|f'(x)| < 3$이므로 f는 평등연속이다.

8. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) f가 평등연속이다.
(2) $x_n \in E,\ y_n \in E,\ x_n - y_n \to 0$이면 $f(x_n) - f(y_n) \to 0$이다.

증 명 (1) $\Rightarrow$ (2) $x_n \in E,\ y_n \in E,\ x_n - y_n \to 0$라고 하자.
f가 평등연속이므로 주어진 $\epsilon > 0$에 대해

$$|x - y| < \delta,\ x, y \in E \text{이면 } |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

인 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재한다.
가정에 의해 $x_n - y_n \to 0$이므로 $n \ge k$이면 $|x_n - y_n| < \delta$인 자연수 k가 존재한다.
따라서 $n \ge k$이면 $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$이므로 $f(x_n) - f(y_n) \to 0$이다.
(2) $\Rightarrow$ (1) 대우로 증명한다.
f가 평등연속이 아니면 다음을 만족시키는 양수 ϵ이 존재한다.
'임의의 $\delta > 0$에 대해 $|x - y| < \delta$이지만 $|f(x) - f(y)| \ge \epsilon$인 $x, y \in E$가 존재한다.'
따라서 각 $\delta = \frac{1}{n}$에 대해

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{이지만 } |f(x) - f(y)| \ge \epsilon$$

인 $x_n,\ y_n \in E$가 존재하므로 f는 평등연속이 아니다.

정 리 8에서 대우를 택하면 바탕 4에 의해 다음이 성립한다.

9. 정 리. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) f 가 평등연속이 아니다.
(2) $x_n - y_n \to 0$이지만 $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$인 $x_n \in E,\ y_n \in E$이 존재한다.
(3) $x_n - y_n \to 0$이지만 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$인 $x_n \in E,\ y_n \in E$와 $\epsilon > 0$이 존재한다.

10. 보 기. (1) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$은 $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = 1$이므로 평등연속이 아니다.
(2) $f : R \to R,\ f(x) = x \sin x$는 자연수 n에 대해

$$f\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) - f(2n\pi) = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{1}{n}$$

이다. 그런데 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 이면 $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x$ 이므로 $\frac{2}{n\pi} \leq \sin \frac{1}{n}$ 이다.

따라서 $f\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) - f(2n\pi) \geq 2n\pi \sin \frac{1}{n} \geq 4$이므로 f는 평등연속이 아니다.

11. 정 리. 연속 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$는 평등연속이다.

증 명 f 가 평등연속이 아니라면 정 리 9에 의해

$$x_n - y_n \to 0 \text{ 이지만 } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

인 $x_n \in [a, b],\ y_n \in [a, b]$와 $\epsilon > 0$ 이 존재한다. 또 수열 $< x_n >$ 은 유계이므로 바 탕3에 의해 수렴하는 부분수열 $< x_{n_k} >$ 를 가진다.

$x_{n_k} \to \alpha$로 놓으면 $y_{n_k} \to \alpha$이고 $\alpha \in [a, b]$ 이다. f 가 $x = \alpha$ 에서 연속이므로

$$|x - \alpha| < \delta,\ x \in [a, b] \text{이면 } |f(x) - f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}$$

인 $\delta > 0$ 이 존재한다. 그런데 $x_{n_k} \to \alpha,\ y_{n_k} \to \alpha$이므로

$$k \geq m \text{이면 } |x_{n_k} - \alpha| < \delta \text{이고 } |y_{n_k} - \alpha| < \delta$$

인 자연수 m이 존재한다. 따라서 $k \geq m$이면

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(\alpha)| + |f(y_{n_k}) - f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ 에 모순이다.

12. 보 기. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$은 $[0, 2]$에서 연속이므로 $(0, 2)$에서 평등연속이다.
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{|x|}$는 $[0, 2]$에서 연속이므로 $(0, 2)$에서 평등연속이다.
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$은 연속이므로 $(0, 2)$에서 평등연속이다.

13. 정 리. 두 실수 $a,\ b(a < b)$와 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대해 다음이 성립한다.
(1) f가 $[a, \infty)$에서 연속, $[b, \infty)$에서 평등연속이면 f는 $[a, \infty)$에서 평등연속이다.
(2) f가 $(-\infty, b]$에서 연속, $(-\infty, a]$에서 평등연속이면 f는 $(-\infty, b]$에서 평등연속이다.
(3) f가 $(-\infty, a]$와 $[a, \infty)$에서 평등연속이면 f는 $\mathbb{R}$에서 평등연속이다.

증 명 (1) 주어진 $\epsilon > 0$에 대해 함수 f가 $[a, b+1]$에서 평등연속이므로
$$|x-y| < \delta_1 \text{이고 } a \le x < y \le b+1 \text{이면 } |f(x)-f(y)| < \epsilon$$
인 양수 δ_1이 존재한다. 또 f가 $[b, \infty)$에서 평등연속이므로
$$|x-y| < \delta_2 \text{이고 } b \le x < y \text{ 이면 } |f(x)-f(y)| < \epsilon$$
인 양수 δ_2가 존재한다. 이제 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$로 놓고 $a \le x < y < x+\delta$라고 하자.
[1] $x \le b$이면 $y \le b+1$이므로 $|f(x)-f(y)| < \epsilon$이다.
[2] $b < x$이면 $b \le x < y$ 이므로 $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ 이다.
따라서 f는 $[a, \infty)$에서 평등연속이다.

(2), (3) (1)과 같은 방법으로 보인다.

14. 보 기. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{|x|}$는
$$|x| \ge 1 \text{이면 } |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \le \frac{1}{2}$$
이므로 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 평등연속이고 $[-1, 1]$에서도 평등연속이다.
따라서 f가 $(-\infty, 1]$, $[1, \infty)$에서 평등연속이므로 $\mathbb{R}$에서 평등연속이다.

(2) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ f(x) = x \sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$은
$$|x| \ge 1 \text{이면 } |f'(x)| = \left| -\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} \right| \le 2$$
이므로 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 평등연속이고 $[-1, 1]$에서도 평등연속이다.
따라서 f가 $(-\infty, 1]$, $[1, \infty)$에서 평등연속이므로 $\mathbb{R}$에서 평등연속이다.

핵심내용

1. 평등연속의 정의

2. 두 함수 $f,\ g\ :\ A \to \mathbb{R}$가 평등연속이면 $f+g$도 평등연속이다.

3. 함수 $f\ :\ A \to B$가 평등연속이고, $g\ :\ B \to \mathbb{R}$가 평등연속이면 $h(x)=g(f(x))$는 A에서 평등연속이다.

4. 연속함수 $f\ :\ I \to \mathbb{R}$가 I^o에서 미분가능하고, f'이 유계이면 f는 평등연속이다.

5. 함수 $f\ :\ E \to \mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) f 가 평등연속이다.
(2) $x_n \in E,\ y_n \in E,\ x_n - y_n \to 0$이면 $f(x_n)-f(y_n) \to 0$이다.

6. 함수 $f\ :\ E \to \mathbb{R}$에 대해 다음은 서로 동치이다.
(1) f 가 평등연속이 아니다.
(2) $x_n - y_n \to 0$이지만 $f(x_n)-f(y_n) \not\to 0$인 $x_n \in E,\ y_n \in E$이 존재한다.
(3) $x_n - y_n \to 0$이지만 $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \epsilon$인 $x_n \in E,\ y_n \in E$와 $\epsilon > 0$이 존재한다.

7. 연속 함수 $f\ :\ [a,\ b] \to \mathbb{R}$는 평등연속이다.

8. 두 실수 $a,\ b(a<b)$와 함수 $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대해 다음이 성립한다.
(1) f 가 $[a,\ \infty)$에서 연속, $[b,\ \infty)$에서 평등연속이면 f는 $[a,\ \infty)$에서 평등연속이다.
(2) f 가 $(-\infty,\ b]$에서 연속, $(-\infty,\ a]$에서 평등연속이면 f는 $(-\infty,\ b]$에서 평등연속이다.
(3) f 가 $(-\infty,\ a]$와 $[a,\ \infty)$에서 평등연속이면 f는 R에서 평등연속이다.

연습문제

1. 다음과 같이 정의된 함수의 평등연속성을 조사하라.

(1) $f : [0, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$ (2) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

(3) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}\sin x$ (4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(5) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ (6) $f : (0, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\cos x}$ (8) $f : (0, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\frac{1}{x}$

(9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin e^x$ (10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x^2$

(11) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x\cos x$ (12) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}\sin e^x$

2. 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 모든 $x \in R$에 대해 $f(x+2) = f(x)$이면 f는 평등연속인가?

함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 다음을 만족시키면 함수 f가 코시수열을 코시수열로 보낸다고 하자.
$x_n \in E$, 수열 $< x_n >$이 코시이면 수열 $< f(x_n) >$도 코시이다

3. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 코시수열을 코시수열로 보내면, $a \in E \cup E'$와 a로 수렴하는 E에서의 두 수열 $< x_n >$, $< y_n >$에 대해 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$임을 보여라.

4. 평등연속함수는 코시수열을 코시수열로 보내는가?

5. 두 함수 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 평등연속이면 f와 g의 곱 fg가 평등연속인가?

6. 미분가능하고 $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$이지만 평등연속인 함수 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$를 하나 구하라.

7. 두 연속함수 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대해
(1) f가 평등연속이고 $x \in R$에 대해 $|g(x)| \le |f(x)|$이면 g도 평등연속인가?
(2) f가 평등연속이 아니고 $x \in R$ 에 대해 $f(x) \le g(x)$이면 g도 평등연속이 아닌가?

8. $(0, \infty)$에서 함수 $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x^2}$는 평등연속이지만 $f'(x)$가 유계가 아님을 보여라.

9. 연속이지만 평등연속이 아닌 함수 $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$을 하나 구하라.

10. 연속함수 $f : (a, b] \to \mathbb{R}$에 대해 극한 $\lim_{x \to a^+} f(x)$가 존재하면 f는 평등연속임을 보여라.

11. $a > 1$이다. 다음 함수 $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$는 평등연속인가?

(1) $f(x) = x^a$ (2) $f(x) = x \ln x$ (3) $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$

12. $a > 1$이다. 다음 연속함수 $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$는 평등연속이 아닌가?

(1) $f(x)$가 미분가능하고 $\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$이다.

(2) $\frac{f(x)}{x}$가 증가함수이고 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$이다.

(3) $\frac{f(x)}{x^a}$가 증가함수이고 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^a} = 1$이다.

(4) $f(x)$가 미분가능한 증가함수이고 모든 자연수 n에 대해 $f'(n) \geq n$이다.

13. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 연속함수이다.

(1) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$이면 f는 $[0, \infty)$에서 평등연속인가?

(2) 두 극한 $\lim_{x \to \infty} f(x)$와 $\lim_{x \to -\infty} f(x)$가 존재하면 f는 평등연속인가?

(3) 극한 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$가 존재하면 f는 $[0, \infty)$에서 평등연속인가?

14. 집합 A가 다음과 같을 때, 함수 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k \sin(x^l)$가 A에서 평등연속이 되는 실수 k와 l의 관계를 구하라.

(1) $[1, \infty)$ (2) $(0, 1]$ (3) $(0, \infty)$

15. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 연속이고 $|f|$가 평등연속이다.

(1) E가 구간이면 f는 평등연속임을 보여라.

(2) 평등연속이 아닌 f를 구하라.

☆16. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 평등연속일 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $g : \overline{E} \to R$, $g|_E = f$ 인 연속함수 g가 존재함을 보여라.

(2) $g : \overline{E} \to R$, $g|_E = f$ 인 평등연속함수 g가 존재함을 보여라.

☆17. 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 집합 E와 E^c에서 각각 평등연속이면 f는 평등연속임을 보여라.

날마다 새롭게

법정 스님

행복이란 무엇인가.
밖에서 오는 행복도 있겠지만
안에서 향기처럼, 꽃향기처럼 피어나는 것이
진정한 행복이다.

그것은 많고 큰 데서 오는 것도 아니고
지극히 사소하고 아주 작은 데서 찾아온다.
조그마한 것에서 잔잔한 기쁨이나
고마움 같은 것을 누릴 때
그것이 행복이다.

문명의 이기에 의존하지 말고
때로는 밤에 텔레비전도 끄고,
촛불이라도 한번 켜 보라.
그러면 산중은 아니더라도
산중의 그윽함을 간접적으로라도 누릴 수 있다.

또한 가족들끼리, 아니면 한두 사람이라도
조촐하게 녹차를 마시면서
잔잔한 이야기를 나눌 수 있다면
거기서 또한 삶의 향기가 피어날 수 있다.

때로는 전화도 내려놓고, 신문도 보지 말고,
단 10분이든 30분이든 허리를 바짝 펴고
벽을 보고 앉아서
나는 누구인가 물어보라.

이렇게 스스로 묻는 물음 속에서
근원적인 삶의 뿌리 같은 것을 확인할 수 있다.
문명의 잡다한 이기로부터 벗어나
하루 한 순간만이라도
순수하게 홀로 있는 시간을 갖는다면
삶의 질이 달라질 것이다.

참고문헌

1. 정동명, 조승제, 실해석학개론, 경문사, 1991

2. T. M. Apostol, Mathematical Analysis, 2nd ed., Addision-Wesley Publishing Company Inc., 1974

3. R. G. Bartle, The Elements of Real Analysis, 2nd ed., John Wiley & Sons Inc., 1976

4. R. G. Bartle & D. R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, 3rd ed., John Wiley & Sons Inc., 2000

5. R. Johnsonbaugh & W. E. Pfaffenberger, Foundations of Mathematical Analysis, Marcel Dekker Inc,. 1981

6. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, 1964